Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II-B de la banque PT 98

On s'intéresse dans ce devoir aux champs des contraintes à l'intérieur d'un matériau. On est amené à redécouvrir le cercle de Mohr dans certains cas particuliers suffisamment généraux pour avoir des applications observables.

Dans tous le problème, on assimilera un endomorphisme ou un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à sa matrice dans la base du moment.

Partie 1

1. Introduisons tout de suite le vecteur $\vec{K}$ unitaire orthogonal au plan P fourni au 2.
   $\vec{x} = \left(\vec{x} - \left(\vec{x}, \vec{K}\right) \vec{K}\right) + \left(\vec{x}, \vec{K}\right) \vec{K}$, le premier vecteur de cette décomposition étant orthogonal à $\vec{K}$, le deuxième étant colinéaire à $\vec{K}$.
   Donc $p(\vec{x}) = p\left(\vec{x} - \left(\vec{x}, \vec{K}\right) \vec{K}\right) + p\left(\left(\vec{x}, \vec{K}\right) \vec{K}\right) = \vec{x} - \left(\vec{x}, \vec{K}\right) \vec{K}$.
   Si Π est la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$, et si $X = {}^t(x, y, z)$, alors
   $\Pi X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\Pi = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

2. $\vec{J} = \frac{1}{3} \frac{2\vec{k} - \vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $\vec{I} = \vec{J} \wedge \vec{K} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$, orthogonale donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

3. f et g sont des fonctions à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}^3$, donc $\boxed{\text{si } \alpha < 0, \text{ alors } S_\alpha = \Sigma_\alpha = \varnothing}$.
   Si $\alpha = 0$, alors $f(x, y, z) = 0 \iff g(x, y, z) = 0 \iff x - y = y - z = z - x = 0$. Les trois équations sont dépendantes, mais les deux premières sont les équations de deux plans orthogonaux à P non confondus ni parallèles, donc $\boxed{\text{si } \alpha = 0, \text{ alors } S_\alpha = \Sigma_\alpha = P^\perp}$.

4. Remarquant que $x_M - y_M = x_{M'} - y_{M'}$ et $y_M - z_M = y_{M'} - z_{M'}$, on en déduit aisément que
   $\boxed{f(M) = f(p(M)) \text{ et } g(M) = g(p(M))}$.
   $\boxed{\text{Les surfaces } S_\alpha \text{ et } \Sigma_\alpha \text{ sont donc des cylindres de direction des génératrices } P^\perp}$.

5. S_α a pour équation
   $f(M)^2 = \alpha^2 \iff 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right) = \alpha^2 \iff 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (x + y + z)^2 = \alpha^2$,
   donc S_α est une surface de révolution d'axe $P^\perp$.
   Introduisons (X, Y, Z) coordonnées de M dans la base $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$.
   Alors $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (x + y + z)^2 = 3\left\|\vec{OM}\right\|^2 - 3\left(\vec{OM}.\vec{K}\right)^2 = 3\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) - 3Z^2$, donc
   $\boxed{S_\alpha \text{ est un cylindre de révolution d'axe } P^\perp \text{ et de rayon } \frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$

6. Soit Δ_1 le plan d'équation $x-y=0$, de vecteur normal $\vec{\delta}=\dfrac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$. Alors si s_1 est la symétrie orthogonale par rapport à Δ_1, $s_1(\vec{u})=\vec{u}-2\left(\vec{u}.\vec{\delta}\right)\vec{\delta}=\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$. Donc $g(s_1(M))=g(M)$, donc M appartient à Σ_α si et seulement si $s_1(M)$ appartient à Σ_α : $\boxed{\Sigma_\alpha \text{ est donc symétrique par rapport à } \Delta_1}$.

   On démontre de même que $\boxed{\Sigma_\alpha \text{ est symétrique par rapport aux plans d'équations } y-z=0 \text{ et } z-x=0}$.

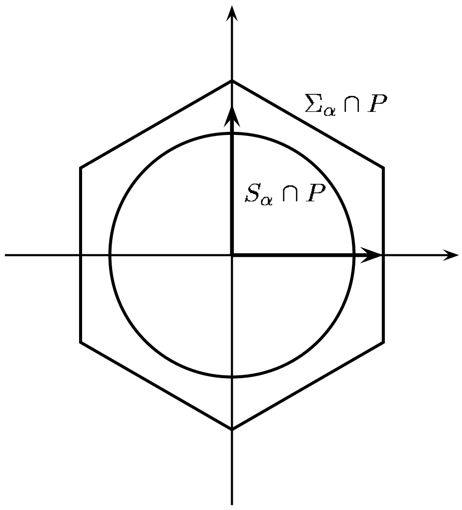
7. La rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de l'axe orienté par le vecteur $\vec{K}$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ (on peut s'en convaincre en écrivant la formule de rotation vectorielle, sinon, un bon dessin suffit). Elle transforme donc ${}^t(x,y,z)$ en ${}^t(z,x,y)$. Cette transformation n'affecte visiblement pas le calcul de $g(M)$, donc

   $\boxed{\Sigma_\alpha \text{ est invariante par la rotation d'angle } \dfrac{2\pi}{3} \text{ autour de l'axe orienté par le vecteur } \vec{K}}$.

8. $g(x,y,-x-y)=\mathrm{Max}\left[|x-y|,|2x-y|,|2y-x|\right]$, donc en substituant dans cette formule les expressions de x et y en fonction de X et Y données par la formule $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$:

   l'intersection de Σ_α avec P a pour équation : $\begin{cases}\max\left(\left|\dfrac{\sqrt{6}}{2}Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}X\right|,\sqrt{2}|X|,\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}X+\dfrac{\sqrt{6}}{2}Y\right|\right)\\ Z=0\end{cases}$.

   Tracons les six droites d'équations $\dfrac{\sqrt{6}}{2}Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}X=\pm\alpha$, $\sqrt{2}X=\pm\alpha$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}X+\dfrac{\sqrt{6}}{2}Y=\pm\alpha$. Elles se déduisent toutes de l'une d'entre elles (on prendra donc la plus simple !) par les rotations et symétries exhibées plus haut. Après un rapide régionnement du plan, on en déduit la figure demandée :



Partie 2

1. $s(\vec{u})=\begin{pmatrix}\sigma_1 u_1\\\sigma_2 u_2\\\sigma_3 u_3\end{pmatrix}$. $\alpha(\vec{u})\vec{u}$ est la projection orthogonale de $s(\vec{u})$ sur $\vec{u}$, donc $\alpha(\vec{u})=\vec{u}.s(\vec{u})$, soit

   $\boxed{\alpha(\vec{u})=\sigma_1u_1^2+\sigma_2u_2^2+\sigma_3u_3^2}$

$$t(\vec{u}) = s(\vec{u}) - \alpha(\vec{u})\,\vec{u} = \begin{pmatrix}\sigma_1 u_1\\ \sigma_2 u_2\\ \sigma_3 u_3\end{pmatrix} - \left(\sigma_1 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + \sigma_3 u_3^2\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix},$$

donc $\boxed{t(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1[(\sigma_1-\sigma_2)\,u_2^2 + (\sigma_1-\sigma_3)\,u_3^2]\\ u_2[(\sigma_2-\sigma_1)\,u_1^2 + (\sigma_2-\sigma_3)\,u_3^2]\\ u_3[(\sigma_3-\sigma_1)\,u_1^2 + (\sigma_3-\sigma_2)\,u_2^2]\end{pmatrix}}$

Enfin, $\|s(\vec{u})\|^2 = \sigma_1^2 u_1^2 + \sigma_2^2 u_2^2 + \sigma_3^2 u_3^2 = \alpha(\vec{u})^2 + \beta(\vec{u})^2$, donc, tous calculs faits :

$$\boxed{\beta(\vec{u})^2 = [u_1 u_2(\sigma_1-\sigma_2)]^2 + [u_1 u_3(\sigma_1-\sigma_3)]^2 + [u_2 u_3(\sigma_2-\sigma_3)]^2}$$

2. $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ traduit le fait que $\vec{u}$ est unitaire.
   $\sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \sigma_3 X_3 = x$ traduit l'égalité $\alpha(\vec{u}) = x$.
   Enfin, $\sigma_1^2 X_1 + \sigma_2^2 X_2 + \sigma_3^2 X_3 = x^2 + y^2$ traduit l'égalité $\|s(\vec{u})\|^2 = \alpha(\vec{u})^2 + \beta(\vec{u})^2$.

   Donc $\boxed{\left(\exists \vec{u}\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{l}\|\vec{u}\| = 1\\ m(\vec{u}) = (x,y)\end{array}\right.\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_3 = 1\\ \sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \sigma_3 X_3 = x\\ \sigma_1^2 X_1 + \sigma_2^2 X_2 + \sigma_3^2 X_3 = x^2 + y^2\end{array}\right.}$

   Réciproquement, si ce système a des solutions positives ou nulles, alors les vecteurs $\left(\varepsilon_1\sqrt{X_1}, \varepsilon_2\sqrt{X_2}, \varepsilon_3\sqrt{X_3}\right)$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$ sont unitaires et ont pour image (x,y) par m.

3. Le déterminant du système (1) est le déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2\end{vmatrix}$, dont on sait qu'il est non nul si et seulement si les σ_i sont distincts deux à deux (ce déterminant vaut $(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)$). Donc le système est de Cramer dans cette question.

   (a) $$X_1 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & \sigma_2 & \sigma_3\\ x^2+y^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2\end{vmatrix}}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)} = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & \sigma_2 - x & \sigma_3 - x\\ x^2+y^2 & \sigma_2^2 - x^2 - y^2 & \sigma_3^2 - x^2 - y^2\end{vmatrix}}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)},$$

   donc après factorisation : $\boxed{X_1 = \dfrac{y^2 + (x-\sigma_2)(x-\sigma_3)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_1)}}$

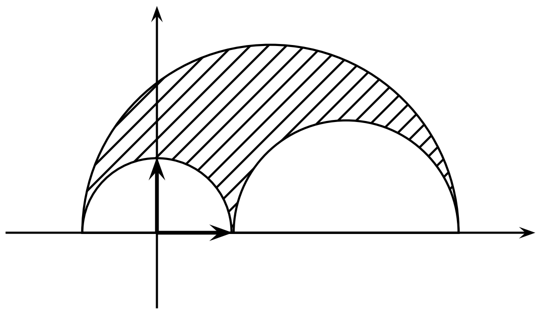
   De même, $\boxed{X_2 = \dfrac{y^2 + (x-\sigma_1)(x-\sigma_3)}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)}}$ et $\boxed{X_3 = \dfrac{y^2 + (x-\sigma_1)(x-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}}$

   (b) Les trois inégalités proposées signifient simplement que X_1, X_2 et X_3 sont des nombres positifs ou nuls. Remarquons que ces équations s'interprètent immédiatement à l'aide de produits scalaires comme des inéquations de disques ou de complémentaires de disques. En effet, si $A(\sigma_1, 0)$, $B(\sigma_2, 0)$ et $M(x,y)$, alors $y^2 + (x-\sigma_1)(x-\sigma_2) = 0$ se traduit par $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ qui est l'équation d'un cerle de diamètre $[AB]$.

   (c) $$\left\{\begin{array}{l} y^2 + (x-1)(x-4) \geq 0\\ y^2 + (x+1)(x-4) \leq 0\\ y^2 + (x-1)(x+1) \geq 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y^2 + \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 \geq \dfrac{9}{4}\\ y^2 + \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \leq \dfrac{25}{4}\\ y^2 + x^2 \geq 1\end{array}\right.$$

   Les points solution sont donc les points (x,y) du demi-plan $y \geq 0$ qui sont dans le demi-disque de centre $(3/2, 0)$ de rayon $5/2$, mais pas dans le demi-disque de centre $(0,0)$ (resp. $(5/2, 0)$) de rayon 1 (resp. $3/2$).

   (d) Traçons les trois cercles décrit à la question précédente. La zone des solutions est hachurée.



4. (a) Résolvons le système formé des deux premières équations en X_1 et $Y_1 = X_2 + X_3$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 + Y_1 = 1 \\ \sigma_1 X_1 + \sigma_2 Y_1 = x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\sigma_2 - x}{\sigma_2 - \sigma_1} \\ Y_1 = \dfrac{x - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \end{array}\right. \quad (2)$$

On doit avoir $\sigma_1^2 X_1 + \sigma_2^2 Y_1 = x^2 + y^2$, soit $\boxed{(\sigma_2 - \sigma_1)\left[y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_2)\right] = 0}$

(b) La condition nécessaire est écrite démontrée ci-dessus.
Si cette condition est réalisée, le système (2) permet de calculer X_1 et Y_1, qui sont clairement positifs. Alors tous les couples de réels positifs ou nuls (X_2, X_3) vérifiant $X_2 + X_3 = Y_1$ forment avec X_1 un triplet de réels positifs solution du système (1). Ceci montre que la condition est aussi suffisante.

(c) $y^2 + (x+1)(x-4) = 0 \iff y^2 + \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$. On retrouve un des cercles déjà tracé dans la question précédente.

5. Les trois équations deviennent : $\left\{\begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 = x \\ X_1 + X_2 + X_3 = x^2 + y^2 \end{array}\right.$.

On en déduit que la seule image possible pour m est $\boxed{(x, y) = (1, 0)}$.

6. D'après ce qui précède, $\beta(\vec{u})$ est la deuxième composante de $m(\vec{u})$ que nous avons déterminé dans presque tous les cas (il resterait à voir le cas $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$ qui se traite comme le cas $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$) :

- si les σ_i sont distincts deux à deux, le maximum de y est soumis à la contrainte de l'équation $y^2 + (x - (\sigma_1 + \sigma_3))^2 \leq \dfrac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{4}$, il vaut $\dfrac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}$;
- si $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$, $y^2 + (x - (\sigma_1 + \sigma_2))^2 = \dfrac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4}$, donc le maximum de y est $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$;
- si $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$, $y^2 + (x - (\sigma_1 + \sigma_3))^2 = \dfrac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{4}$, donc le maximum de y est $\dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$;
- enfin, si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, $y = 0$.

On remarque que dans tous les cas, on peut écrire : $\boxed{T(s) = \dfrac{1}{2} g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}$

Partie 3

On s'intéresse à quelques applications dans le cadre de la résistance des matériaux. L'idée est la suivante : étant donnée une répartition de contraintes sur un matériaux, quelles sont les directions dans lesquelles, à l'intérieur du matériau, la contrainte résultante est maximale. C'est dans ces directions que s'effectuera la rupture du matériau.

1. (a) Cherchons les valeurs propres de A_M :

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 0 & -X & b \\ 0 & b & a - X \end{vmatrix} = -X\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} - X\right)\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} - X\right)$$

Les valeurs propres, sont donc, dans l'ordre croissant : $\sigma_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$.
Donc $g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{a^2 + 4b^2}$, et $\boxed{T(s_M) = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}}$.

(b) Ici $\beta(\vec{u}) = \sqrt{(au_1u_3)^2 + (au_2u_3)^2} = a\sqrt{u_3^2(1 - u_3^2)}$.
On sait que la fonction $x \mapsto x(1 - x)$ prend son maximum sur $[0, 1]$ en $1/2$, ce maximum valant $1/4$.
Donc $\boxed{\text{les vecteurs réalisant ce maximum sont les vecteurs de troisième composante égale à } \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.
On reconnait ainsi l'angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec la direction principale de traction. On observe systématiquement ce phenomene lorsque l'on tire sur une eprouvette dans le cadre d'un essai de resistance en traction : les plans de rupture du materiau sont (approximativement) inclinés de 45° par rapport a la direction de traction.

(c) Ecrivons $a = \dfrac{E}{S}$, où E est l'effort de traction et S l'aire de la section de tube. Alors à la limite de rupture, on a $T(s_M) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{E_{\text{lim}}}{S} + 4b^2} = R$, soit $E_{\text{lim}} = 4S\left(R^2 - b^2\right)$. On voit alors que E_{lim} est maximale lorsque $b = 0$, c'est à dire lorsque l'on est en traction simple.

2. Dans ce cas, les trois valeurs propres sont égales, donc $T(s) = 0$ dans ce cas. On voit bien que le critère de résistance est toujours satisfait. Ceci explique que l'épave du Titanic continue à poluer notre petit — et surtout notre grand — écran : les trésors enfouis au fond des mers (du moins ceux non comestibles) resteront intacts jusqu'à ce qu'un petit malin trouve le moyen de les repécher. Le problème est que le corps humain, ou une cloche de plongée, ne passent pas le critère de résistance : ils ne sont pas remplis de liquide, eux.