Première partie

1. (a) D'après le cours, le problème de Cauchy $\big((E)$ et $\vec{F}(t_0)=\vec{F_0}\big)$ a une *solution unique*.

   (b) $\vec{0}$ est solution de (E); Si une solution de (E) s'annule en t_0, alors par unicité, on peut l'identifier à $\vec{0}$ et $\vec{F}\equiv 0$

2. (a) $\nu=\|\vec{F}\|=(\vec{F}\cdot\vec{F})^{\frac{1}{2}}$ est dérivable en tout point où $\vec{F}\cdot\vec{F}$ ne s'annule pas, donc $\vec{F}$ ne s'annule pas, ce qui est toujours réalisé si $\vec{F}\not\equiv 0$.
   $\vec{f}$ est dérivable comme rapport de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

   (b) $\|\vec{f}(t)\|^2(t)=\vec{f}^2(t)=1=cte$ donc $\vec{f}\cdot\vec{f}'(t)=0$.

   (c) Comme $\nu^2=\vec{f}^2$, $\nu'(t)=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{F}'(t)}{\nu(t)}=\dfrac{\vec{F}\cdot a(\vec{F}')}{\nu}(t)=\dfrac{a(\nu.\vec{f})\cdot\nu.\vec{f}}{\nu}=\nu.a(\vec{f})\cdot\vec{f}$.

3. Donc $\dfrac{\mathrm{d}\nu\cdot\vec{f}}{\mathrm{d}t}=a(\nu\vec{f})$ devient $\nu\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}\vec{f}=\nu a(\vec{f})$ soit $\nu\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}+\nu(a(\vec{f})\cdot\vec{f}).vecf=\nu a(\vec{f})$, et, par division par $\nu\neq 0$, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}+(a(\vec{f})\cdot\vec{f}).\vec{f}=a(\vec{f})}$

Deuxième partie

1. (a) Le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& G(\lambda-1)y\\ y' &=& G(\lambda+1)x\\ z' &=& 0\end{array}\right.$ donc $z=cte=z_0$.

   (b) $x_0=y_0=0$ est vérifié pour $x=y=cte=0$, donc par unicité de la solution, la solution est bien $x=y=cte=0$, $z=cte=z_0$.

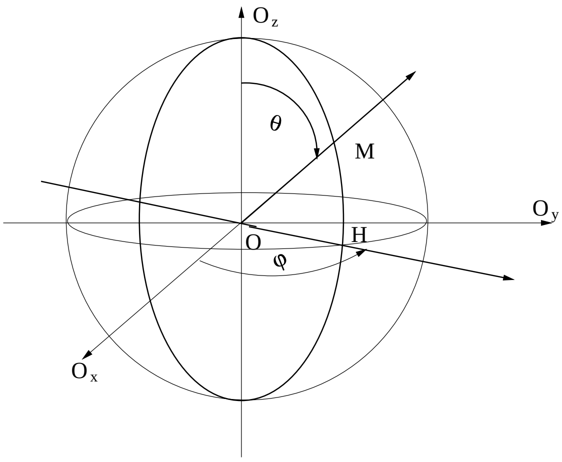
2. $r^2xx'+yy'=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}.G.(\lambda-1).xy+G.(\lambda+1).xy=G.xy.(\lambda+1-(\lambda+1))=0$, c'est-à-dire que pour les courbes intégrales de (E) : $\vec{OM}'.\dfrac{\mathrm{d}\vec{OM}'}{\mathrm{d}t}$ où M' est l'image de M par l'affinité : $(\overrightarrow{\imath}\to\dfrac{\overrightarrow{\imath}}{r},\overrightarrow{\jmath}\to\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\to k)$.
   Il en résulte que les courbes intégrales de (E) sont des ellipses, image du cercle unité par une affinité.

3. (a) $x''=G.(\lambda-1)y'=G.(\lambda^2-1)x$ et $y''=G.(\lambda+1)=G.(\lambda^2-1)y$
   x et y sont solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2u=0$.

   (b) On trouve $x(t)=\lambda_1\cos(\omega t)+\mu_1\sin(\omega t)$ et alors $x'(t)=-\omega\lambda_1\sin(\omega t)+\lambda\mu_1\cos(\omega t)=G.(\lambda-1)y(t)$.
   Comme $\dfrac{\omega}{G.(\lambda-1)}=\dfrac{G.\sqrt{1-\lambda^2}}{-G.(1-\lambda)}=-\sqrt{\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}}=-r$, alors $y(t)=r\lambda_1\sin(\omega t)-r\mu_1\cos(\omega t)$.

   (c) Si x n'est pas identiquement nulle, alors $\sqrt{\lambda_0^2+\mu_0^2}\neq 0$ et $x(t)=\sqrt{\lambda_0^2+\mu_0^2}\left(\dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu_0^2}}\cos(\omega t)+\sqrt{\lambda_0^2+\mu_0^2}\sin(\omega t)\right)$.
   Il existe un unique réel t_0 de $[0,2\pi[$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos(\omega t_0) &=& \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu_0^2}}\\ \sin(\omega t_0) &=& \dfrac{\mu_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu_0^2}}\end{array}\right.$ Alors $x(t)=A\cos(\omega(t-t_0))$,
   donc $x'(t)=-A\omega\sin(\omega(t-t_0))=G.(\lambda-1)y(t)$. Comme $\dfrac{\omega}{G.(\lambda-1)}=\dfrac{G.\sqrt{1-\lambda^2}}{-G.(1-\lambda)}=-\sqrt{\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}}=-r$, $y(t)=rA\sin(\omega(t-t_0))$ et enfin , sur une intervalle où $x(t)\neq 0$: $\dfrac{y(t)}{x(t)}=r\tan\omega(t-t_0)$.
   Avec $t:=0$, on obtient $\dfrac{y_0}{x_0}=r\tan\omega(-t_0)$ donc $\tan-(\omega t_0)=\dfrac{y_0}{r.x_0}$ et $\boxed{t_0=-\dfrac{1}{\omega}\arctan\left(\dfrac{y_0}{r.x_0}\right)}$.

Troisième partie

1. (a) 

H est l'intersection du méridien de la sphère unité passant par M avec l'équateur ; $(\overrightarrow{OH} = \vec{f}(t))$
$\overrightarrow{OH} = \cos\varphi\vec{e_1} + \sin\varphi\vec{e_2}$ $\varphi(t) = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OH}})$.
$\overrightarrow{OM} = \cos\theta\vec{e_3} + \sin\theta\overrightarrow{OH}$ $\varphi(t) = (\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{OM}})$.

(b) $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \sin(\theta(t_0)) = 0 \iff \exists t_0 \in \mathbb{R}, x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x = y = cte = 0$ conviennent comme solution de (E) . Par unicité d'une telle solution, $x(t)$ et $y(t)$ sont identiquement nuls et $\sin\theta = cte = 0$.

(c) $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \cos(\theta(t_0)) = 0 \iff \exists t_0 \in \mathbb{R}, z(t_0) = 0$ alors $z = cte = 0$ conviennent comme solution de (E) . Par unicité d'une telle solution, $z(t)$ est identiquement nul et $\cos\theta = cte = 0$.

(d) $\sin 2\theta(t_0) = 0 \iff (\cos\theta(t_0) = 0$ ou $\sin\theta(t_0) = 0) \iff \big((\forall t \in \mathbb{R}, \sin\theta = 0)$ ou $(\forall t \in \mathbb{R}, \cos\theta = 0)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \sin 2\theta(t) = 0 \iff \big(\forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) = k.\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\big)$.

Étant donnée la continuité de θ, cette dernière propriété implique $\theta(t) = cte = k.\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2. Soient $\vec{u(t)} = \cos\phi(t)\vec{e_1} + \sin\phi(t)\vec{e_2}$ et $\vec{v(t)}$ le vecteur tel que $B_\phi(t) = (\vec{u(t)}, \vec{v(t)}, \vec{e_3})$ soit une base orthonormale directe.

(a) $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^+(3)$, donc $\vec{v}(t) = -\sin\phi\vec{e_1} + \cos\phi\vec{e_2}$.

D'autre part $\vec{f'(t)} = \phi'(t)\,(-\sin\theta\sin\phi\vec{e_2} + \sin\theta\cos\phi\vec{e_2}) + \theta'(t)\,(\cos\theta\cos\phi\vec{e_2} + \cos\theta\sin\phi\vec{e_2} - \sin\theta\vec{e_3})$;

$\boxed{\vec{f'(t)} = \theta'(t)\cos\theta\vec{u}(t) + \phi'(t)\sin\theta\vec{v}(t) - \theta'(t)\sin\theta\vec{e_3}}$

(b) La matrice de passage de $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e_3})$ est
$P = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de A dans $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e_3})$ est donc

$$\boxed{A_\phi(t) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2\lambda\cos\phi\sin\phi & -1 + \lambda(\cos^2\phi - \sin^2\phi) & 0 \\ 1 + \lambda(\cos^2\phi - \sin^2\phi) & 2\lambda\cos\phi\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(c) $\vec{f}(t) = \sin\theta\vec{u}(t) + \cos\theta\vec{e_3}$, donc
$a(\vec{f}(t)) = \sin\theta a(\vec{u}(t)) = G.\big(2\lambda\cos\phi\sin\phi\sin\theta\big)\vec{u}(t) + G.\big(1 + \lambda(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\big)\sin\theta\vec{v}(t)$
$a(\vec{f(t)}) \cdot \vec{f(t)} = G.\big(2\lambda\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta$ car $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e_3})$ est orthonormée.

3. (a)
$$\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} \quad = \quad -\big(a(\vec{f(t)}) \cdot \vec{f(t)}\big)\vec{f} \quad + \quad a(\vec{f}) \qquad (e)$$
devient par projection sur $\vec{u}, \vec{v}$ puis$\vec{e_3}$
$$\begin{array}{rclcll} \theta'\cos\theta & = & -2G\lambda\cos\phi\sin\phi\sin^3\theta & + & 2\lambda\cos\phi\sin\phi\sin\theta & (E_1) \\ \phi'\sin\theta & = & 0 & + & G(1 + \lambda(\cos^2\phi - \sin^2\phi)) & (E_2) \\ -\theta'\sin\theta & = & -2G\lambda\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta\cos\theta & + & & (E_3) \end{array}$$

(b) si $\vec{f_0}$ et $\vec{e_3}$ ne sont pas colinéaires, alors $\sin(2\theta_0) \neq 0$ donc $\sin(2\theta)$ ne s'annule pas, et $(E_1) \iff \theta'\cos\theta = -2G\lambda\cos\phi\sin\phi\sin\theta(1 - \sin^2\theta)$, après division par $\cos\theta$, donne le même résultat que (E_3) après divison par $\sin\theta$, soit : (2) : $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2G\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta$.

De même, (E_3) donne (1) : $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda)$ après division par $\sin\theta$.

4. Lorsque $\lambda = 0$, $\theta' = 0$, donc $\theta = \theta_0 = cte$ et $\phi' = G.(1-\lambda)$, donc $\phi = G.(1-\lambda)(\phi-\phi_0)+\phi_0$.
   La trajectoire parcourue par le point m est le parallèle de la sphère défini par $\theta = \theta_0$.

5. (a) $\phi' = 2\lambda\cos^2\phi + 1 - \lambda = 1 + \lambda\cos 2\phi > 1 - |\lambda| > 0$ Donc ϕ' ne s'annule pas, et en outre, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi(t) - \phi(0)| > (1-|\lambda|).|t|$, et donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty} |\phi(t)| = +\infty$;
   donc toute solution ϕ de (1) est strictement monotone, et non bornée ; ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) θ' est identiquement nulle, ssi $\forall t \in \mathbb{R}, 2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta) = 0$, ce qui implique $\sin(2\theta_0) = 0$
   Réciproquement, si $\sin(2\theta_0) = 0$, alors θ coïncide en $t = 0$ avec une solution constante donc elle lui est égale par unicité.

   (c) $(2)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2G\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta$ s'écrit si $\sin(2\theta)$ ne s'annule pas : $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = G.\lambda.\sin\phi\cos\phi\mathrm{d}t$
   Or $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) = G.(\lambda\cos 2\phi + 1)$ d'après (1) donc (2) devient
   $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sin 2\phi\mathrm{d}\phi}{\lambda\cos 2\phi + 1}$, une équation à variables séparées. Il reste à intégrer :
   $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \int \frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\sin^2\theta\cos\theta} \overset{u:=\cos\theta}{=} \int \frac{-\mathrm{d}u}{2(1-u^2)u} \overset{v:=u^2}{=} \frac{-1}{4}\int \frac{\mathrm{d}v}{2(1-v)v} = \frac{1}{4}\ln\frac{1-v}{v} =$
   $\dfrac{1}{2}\ln|\tan\theta|$ et $\displaystyle\int \frac{\sin 2\phi\mathrm{d}\phi}{\lambda\cos 2\phi + 1} = -\frac{1}{2}\ln(1 + 2\cos 2\phi)$;
   Or $1 + \lambda\cos 2\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi + \lambda(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = (1+\lambda)\cos^2\phi + (1-\lambda)\sin^2\phi =$
   $(1-\lambda)\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = (1-\lambda)(r^2\cos^2\phi + \sin^2\phi)$ donc
   $(2) \iff \ln|\tan\theta| = -\dfrac{1}{2}\ln(r^2\cos^2\phi + \sin^2\phi) + cte$ soit $\tan\theta = C.\sqrt{r^2\cos^2\phi + \sin^2\phi}$

6. (a) $\phi_2'(t) = \phi_1'(t-t_1)$; en réalisant $t \mapsto t \to t_1$ dans (1) :
   $\dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t-t_1) = 2G.\lambda\cos^2\big(\phi_1(t-t_1)\big) + G.(1-\lambda)$ soit $\phi_2'(t) = 2G.\lambda\cos^2\phi_2 + G.(1-\lambda)$.
   $\mathcal{C}_\lambda$ est globalement invariant par les rotations d'axe O_z

   (b) $\phi_3'(t) = \phi_1'(-t)$; en réalisant $t \mapsto -t$ dans (1) :
   $\dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(-t) = 2G.\lambda\cos^2\big(-\phi_1(-t)\big) + G.(1-\lambda)$ soit $\phi_3'(t) = 2G.\lambda\cos^2\phi_3(t) + G.(1-\lambda)$.
   $\mathcal{C}_\lambda$ est globalement invariant par la réflexion de plan O_{xz}

   (c) $\phi_4'(t) = \phi_1'(-t)$;
   $2\lambda\cos^2\phi_1(t) + 1 - \lambda = 2\lambda\sin^2\phi_4(t) + 1 - \lambda = 2\lambda(1-\cos^2\phi_4(t)) + 1 - \lambda = 1 + \lambda - 2\lambda\cos^2\phi_4(t)$
   donc $\dfrac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(-t) = 2G.\lambda\cos^2\big(-\phi_1(t)\big) + G.(1-\lambda) = -2G.\lambda\cos^2\big(\phi_4(t)\big) + G.(1+\lambda) = \dfrac{\mathrm{d}\phi_4}{\mathrm{d}t}(t)$ soit
   $\phi_3'(t) = 2G.\lambda\cos^2\phi_3(t) + G.(1-\lambda)$.
   $\mathcal{C}_{-\lambda}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}\lambda$ par la réflexion de plan $y = x$

7. (a) $u = \tan\phi$ donc $\phi = \arctan u$; $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{1+u^2}$ et $\cos^2\phi = \dfrac{1}{1+\tan^2\phi} = \dfrac{1}{1+u^2}$.
   Alors $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}.\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \tau'(u)\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \tau'(u)\left(\dfrac{2G\lambda}{1+u^2} + G(1-\lambda)\right)$ et $1 = \tau'(u)(2G\lambda + G(1-\lambda)(1+u^2)) = G.\tau'(u)\big((1+\lambda) + (1-\lambda)u^2\big) = \tau'(u).G.(1-\lambda)(r^2+u^2)$.
   L'équation (1) devient finalement : $\tau'(u) = \dfrac{1}{G(1-\lambda)}\dfrac{1}{1+u^2}$.

   (b) Cette nouvelle équation s'intègre en : $t = \tau(u) = \tau_k + \dfrac{1}{G.r(1-\lambda)}\arctan\dfrac{u}{r}$ si $t \in]t_k, t_{k+1}[$.
   Lorsque $t \to t_k$, $\phi(t) \to \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $\tan\phi(t) \to -\infty$ et $\arctan\left(\dfrac{\tan\phi(t)}{r}\right) \to -\dfrac{\pi}{2}$. $t_k = \tau_k - \dfrac{\pi}{2G.r(1-\lambda)}$
   donc $\boxed{\tau_k = t_k + \dfrac{\pi}{2G.r(1-\lambda)}}$

(c) $\tan\phi = u = r\tan\big(Gr(1-\lambda)t - Gr(1-\lambda)\tau_k\big) = r\tan\left(Gr(1-\lambda)(t-t_k) - \dfrac{\pi}{2}\right)$ donc

$\tan\phi = \dfrac{-r}{\tan Gr(1-\lambda)(t-t_k)}$

Or $r(1-\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}$ et $r + \dfrac{1}{r} = \sqrt{\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}} + \sqrt{\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}}$

Les solutions de (1) sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{Gr(1-\lambda)} = \dfrac{\pi}{G}\left(r+\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{2\pi}{\omega}$