

Correction EML 2007

Voie économique

La correction comporte 13 pages.

Exercice 1

- Comme la matrice A est *symétrique réelle*, elle est donc diagonalisable d'après le cours.
- A étant diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale. Il existe donc une matrice P inversible et une matrice diagonale D , toutes deux carrées d'ordre trois telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Commençons par chercher le spectre de A .

Nous pourrions chercher classiquement une réduite de Gauss de la matrice $A - \lambda I_3$ où λ est une valeur propre de A et I_3 la matrice identité, mais nous pouvons aller bien plus vite en constatant deux points :

- la somme des éléments de chaque colonne vaut systématiquement 1, donc :

$$1 \text{ est valeur propre de } A \text{ de vecteur colonne propre } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- D'autre part en examinant de près la matrice A on voit clairement que $A + \frac{1}{2}I_3$ est non inversible. Ainsi :

$$-\frac{1}{2} \text{ est valeur propre de } A$$

Cherchons l'espace propre associé à $-\frac{1}{2}$. Notons-le $E_{-\frac{1}{2}}(A)$. Il est défini par :

$$\begin{aligned} E_{-\frac{1}{2}}(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -\frac{1}{2}X \right\} \\ &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + y + z = 0 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Nota bene : ces deux vecteurs ont été choisis de manière à respecter la consigne demandant de construire une matrice de passage qui soit symétrique et telle que sa première ligne soit $(1 \ 1 \ 1)$ et sa deuxième $(1 \ -1 \ 0)$.

Avons-nous pour autant terminé le travail ? Réponse oui, car d'après le cours nous savons que la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être égale à trois puisque A est une matrice carrée d'ordre trois et diagonalisable. D'après le cours chacune des dimensions des sous-espaces propres est supérieure ou égale à 1. Or comme les colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non nulles et non proportionnelles, elles forment une *famille libre* de $E_{-\frac{1}{2}}(A)$ qui est donc

de dimension deux. Mécaniquement cela impose que $\dim E_1(A) = 1$.

Conclusion :

$$\text{Spec}A = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\} \quad \text{et} \quad A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Un calcul sans commentaire particulier, utilisant la *méthode du pivot de Gauss*, donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Une démonstration classique faite par *réurrence* nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

car l'initialisation est immédiate :

$$\begin{aligned} A^0 &= PD^0P^{-1} \\ &= PI_3P^{-1} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Supposons que pour n fixé dans \mathbb{N} , nous ayons $A^n = PD^nP^{-1}$. Or :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

La proposition est transmissible et donc héréditaire pour tout entier naturel n .

Le lecteur prendra aussi le soin de démontrer par *réurrence* que D^n reste une matrice diagonale dont les coefficient diagonaux sont constitués de ceux de D à la puissance n . Ainsi :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 1 & 0 & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. _

(a) Montrons que la proposition $\mathcal{P}_n : "X_n = A^n X_0"$ est vraie pour tout entier n .

- L'initialisation est vérifiée pour $n = 0$ car $A^0 = I_3$ et $X_0 = A^0 X_0$.

- Supposons que pour n fixé dans \mathbb{N} , \mathcal{P}_n soit vraie.
- Nous avons :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

Conclusion :

Ainsi $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ et la proposition \mathcal{P}_n est héréditaire pour tout entier naturel n

(b) Le résultat de la question précédente nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0 \left(2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) - w_0 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) - v_0 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \\ v_0 \left(2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) - w_0 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) - u_0 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \\ w_0 \left(2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) - v_0 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) - u_0 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0 + v_0 + w_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0) \\ u_0 + v_0 + w_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 2v_0 + w_0) \\ u_0 + v_0 + w_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + v_0 - 2w_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0 + v_0 + w_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (3u_0 - u_0 - v_0 - w_0) \\ u_0 + v_0 + w_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + v_0 + w_0 - 3v_0) \\ u_0 + v_0 + w_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + v_0 + w_0 - 3w_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (3u_0 - 1) \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (1 - 3v_0) \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (1 - 3w_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : nous avons bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

(c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ du fait que $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ nous pouvons dire sans difficulté que :

$$\boxed{u = v = w = \frac{1}{3}}$$

(d) On note pour tout entier n , $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$ soit :

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{\left(u_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_n - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} \left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2\right]} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2\right]} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

car par hypothèse $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ avec $(u_0, v_0, w_0) \in (\mathbb{R}_+)^3$ donc $(u_0, v_0, w_0) \in ([0, 1])^3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, d_n &\leq \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \text{ et à fortiori} \\ d_n &\leq \sqrt{4 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$$

(e) Pour déterminer un entier naturel n tel que $d_n \leq 10^{-2}$, il suffit de trouver n tel que :

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} -(n-1) \ln 2 &\leq -2 \ln 10 \text{ car } \ln \text{ est strictement sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Rightarrow n-1 &\geq \frac{2 \ln 10}{\ln 2} \\ \Rightarrow n &\geq \frac{2 \ln 10}{\ln 2} + 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{dès que } n \text{ est supérieur ou égal à } n_0 = \left\lceil \frac{2 \ln 10}{\ln 2} + 1 \right\rceil = \left\lfloor \frac{2 \ln 10}{\ln 2} \right\rfloor + 1 \text{ nous avons } d_n \leq 10^{-2}}$$

Exercice 2

Préliminaire

1. La fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x) = x^2 + \ln x$ est continue et dérivable sur son domaine de définition \mathbb{R}_+^* en tant que somme de telles fonctions, avec :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \\ &> 0 \text{ (signe immédiat)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ nous pouvons dire que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty}$$

- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ nous pouvons dire que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

2. Les résultats de la question précédente nous permettent d'affirmer que g étant continue et strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* , g réalise une bijection sur cet ensemble vers $g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Enfin comme $0 \in g(\mathbb{R}_+^*)$ nous pouvons dire :

$$\boxed{\text{il existe un unique réel } x \text{ noté } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } g(\alpha) = 0}$$

3. Comme $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$ nous avons $g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0$ et nous pouvons situer α strictement entre $\frac{1}{2}$ et 1. Autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et nous considérons l'application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$.

1. _

- (a) Tout d'abord f est continue et dérivable sur le segment I en tant que somme de telles fonctions avec :

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{1}{4x}(2x^2 - 4x + 1)$$

Le discriminant réduit, du trinôme du second degré définissant le numérateur de la dérivée, étant strictement positif, nous pouvons affirmer qu'il admet deux racines distinctes qui sont après calcul :

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$$

Alors en utilisant les règles du signe d'un trinôme du second degré, nous pouvons affirmer que $f' > 0$ sur I , autrement dit :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left[\frac{1}{2}; 1\right]}$$

(b) –

- Tout d'abord signalons que :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{7}{16} \\ \text{et } f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} &= \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{16} \\ &= \frac{4\ln 2 - 1}{16} \\ &> 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

- L'inégalité :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) \quad (2)$$

est une des conséquences de la croissance stricte de f sur I .

- Enfin :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \\ &< 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Conséquence : selon (1), (2), (3) nous avons :

$$\boxed{\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1} \quad (4)$$

(c) Le résultat (4) de la question précédente, associé à la stricte croissance de f sur I , nous montre l'implication :

$$\forall x \in I \implies f(x) \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\subset I$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in I \implies f(x) \in I}$$

Nota bene : on dit que I est un intervalle stable pour f et comme il contient le premier terme de la suite définie ci-dessous, nous pouvons que celle-ci est bien définie.2. Considérons la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (suite récurrente d'ordre un).

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= f(1) \text{ par définition} \\ &= \boxed{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

(b) Nous pouvons dire que I étant stable par f et comme I contient le premier terme de la suite :

$$\boxed{\text{la suite est à valeurs dans } I}$$

Maintenant vous pouvez aussi démontrer ce résultat par récurrence.

- L'initialisation ne pose aucun problème puisque $u_0 = 1 \in I$.
- Supposons que pour n fixé dans \mathbb{N} , $u_n \in I$.
- Nous savons que $u_{n+1} = f(u_n)$ où selon l'hypothèse de récurrence $u_n \in I$ avec I intervalle stable par f , donc $u_{n+1} \in I$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$$

- (c) Nous savons que la fonction f définissant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, ainsi la suite est *monotone*. Son sens de variation étant donné par le signe de $u_1 - u_0 = \frac{3}{4} - 1 < 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

- (d) Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par $\frac{1}{2}$), le *théorème de convergence monotone* nous assure que la suite converge vers une limite $l \in I$ et $l = f(l)$ puisque f est continue sur I . La résolution dans I de l'équation $l = f(l)$ nous donnant d'après le préliminaire une solution unique $l = \alpha$, la conclusion est donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente vers } \alpha}$$

Partie B

Considérons $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y) = xe^y + y \ln x$.

1. _

- (a) Détaillons ...

- $\varphi_1 : (x, y) \mapsto y \ln x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction polynôme de deux variables de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et d'une fonction composée d'une fonction polynôme de deux variables de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et de \ln qui est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* ,
- $\varphi_2 : (x, y) \mapsto xe^y$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction polynôme de deux variables de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et d'une fonction composée d'une fonction polynôme de deux variables de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} et de \exp qui est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Conclusion : F est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions ($F = \varphi_1 + \varphi_2$).

- (b) Cherchons les points critiques (a_0, b_0) de F sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ces points vérifient par définition :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, b_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a_0, b_0) = 0$$

Des calculs rapides donnent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{y_0 + x_0 e^{y_0}}{x_0} = 0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{y_0} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \ln x_0 + x_0 e^{\ln x_0} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ \ln x_0 + x_0^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_0 = \ln x_0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_0 = \ln \alpha \\ x_0 = \alpha \end{cases} \quad \text{selon le préliminaire} \end{aligned}$$

Conclusion :

F n'admet sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qu'un seul point critique : $(\alpha, \ln \alpha)$

2. Comme nous étudions F sur un ouvert, si F admet un extremum c'est forcément au point critique trouvé à la question précédente. F est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (la démonstration étant exactement identique à la question 1.a). Nous avons après quelques calculs rapides :

- $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-y}{x^2}$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = xe^y$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{xe^y + 1}{x}$ le *théorème de Schwarz* s'applique ici.

Examinons maintenant la nature du point critique $(\alpha, \ln \alpha)$. Pour cela calculons $rt - s^2$ en notant :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha, \ln \alpha) \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\alpha, \ln \alpha) \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\alpha, \ln \alpha)$$

Cela nous donne facilement :

$$\begin{aligned} rt - s^2 &= \left(\frac{-\ln \alpha}{\alpha^2} \right) (\alpha e^{\ln \alpha}) - \left(\frac{\alpha e^{\ln \alpha} + 1}{\alpha} \right)^2 \\ &= -\ln \alpha - \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \right)^2 \\ &= -\ln \alpha - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \\ &= -\left(\frac{2\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^2 \ln \alpha + 1}{\alpha^2} \right) \\ &= -\left(\frac{2\alpha^2 + \alpha^2 g(\alpha) + 1}{\alpha^2} \right) \\ &= -\left(\frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

La stricte négativité du résultat nous permet de dire que :

F ne présente pas d'extremum local au point $(\alpha, \ln \alpha)$

Exercice 3

1. Cette question ne pose aucun problème en introduisant une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, alors une de ses densité pourrait être f sans aucun problème.

2. _

- (a) Remarquez que le constat précédent nous fait écrire que $X \leftrightarrow \varepsilon(1)$.

Par définition, nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = 0]) &= \mathbf{P}([X < 1]) \\ &= F_X(1) \text{ où } F_X \text{ est la fonction de répartition de } X \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Y = n]) &= \mathbf{P}([n \leq X < n+1]) \\ &= F_X(n+1) - F_X(n) \\ &= \left(1 - e^{-(n+1)} \right) - \left(1 - e^{-n} \right) \\ &= e^{-n} - e^{-(n+1)} \\ &= e^{-n} (1 - e^{-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

Selon (5) et (6) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([Y = n]) = e^{-n} (1 - e^{-1})$$

(b) La variable $Y + 1$ est à valeurs dans \mathbb{N}^* avec :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Y + 1 = n]) &= \mathbf{P}([Y = n - 1]) \\ &= e^{-(n-1)} (1 - e^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Comme d'après le cours, $Y + 1$ admet une espérance et une variance (en tant que variable géométrique), Y admet donc une espérance et une variance, respectivement égales¹ à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}(Y + 1) - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} - 1 \\ &= \frac{1}{e - 1} \\ \mathbf{V}(Y) &= \mathbf{V}(Y + 1) \text{ par propriété de } \mathbf{V} \\ &= \frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} \\ &= \frac{e}{(e - 1)^2} \end{aligned}$$

Nota bene : nous pouvons constater que $Y = \lfloor X \rfloor$ mais l'énoncé ne l'a pas précisé pour ne pas faire peur peut-être !

(c) Il s'agit de simuler une expérience de loi géométrique pour $Y + 1$. On fait un tirage au sort, répété jusqu'au premier succès (la probabilité du succès est $p = 1 - \frac{1}{e}$).

Comme `random` fournit une valeur équiprobable sur $[0, 1[$, on considère que ses valeurs sur $\left[0, 1 - \frac{1}{e}\right]$ correspondent à la réussite de l'expérience, et sur $\left]1 - \frac{1}{e}, 1\right]$ à son échec. $Y + 1$ correspondra au rang du premier succès (à partir de 1) donc Y sera ce rang moins un.

```
program em12007;
begin
  randomize;
  u:=random; y:=1;
  while (u>1-1/e) do
  begin
    u:=random;
    y:=y+1;
  end;
  y:=y-1;
  writeln('y vaut ', y);
end.
```

¹On rappelle les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid aX + b \text{ admet une espérance} &\iff X \text{ admet une espérance} \\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid aX + b \text{ admet une variance} &\iff X \text{ admet une variance} \end{aligned}$$

3. _

- (a) ♥♥♥ La variable T admet une espérance en tant que produit de deux variables, $2U - 1$ et Y , admettant chacune un *moment d'ordre deux*. Avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}((2U - 1)Y) \\
 &= \mathbf{E}(2U - 1) \mathbf{E}(Y) \text{ par linéarité de l'espérance et car } U \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
 &= (2\mathbf{E}(U) - 1) \mathbf{E}(Y) \\
 &= \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right) \mathbf{E}(Y) \text{ car } U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \boxed{0}
 \end{aligned}$$

- (b) Vérifions ...

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \left((2U - 1)^2 Y^2\right) \\
 &= 4U^2 Y^2 - 4UY^2 + Y^2 \\
 &= 4UY^2 - 4UY^2 + Y^2 \\
 &= \boxed{Y^2}
 \end{aligned}$$

♥♥♥ Car du fait que U suit une *loi de Bernoulli*, nous avons l'égalité $U^2 = U$. En effet :

$$\begin{aligned}
 \forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = 1 &\iff U^2(\omega) = 1 \quad \text{puisque } U(\Omega) = \{0, 1\} \\
 \text{et } \forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = 0 &\iff U^2(\omega) = 0 \quad \text{puisque } U(\Omega) = \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Comme Y^2 admet une espérance, T^2 en admet une aussi. Autrement dit T admet une variance égale selon le *théorème de Huygens-Koenig* à :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(T) &= \mathbf{E}(T^2) - (\mathbf{E}(T))^2 \\
 &= \mathbf{E}(Y^2) \\
 &= \mathbf{V}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2 \text{ selon le } \textit{théorème de Huygens-Koenig} \\
 &= \frac{e}{(e-1)^2} + \left(\frac{1}{e-1}\right)^2 \\
 &= \boxed{\frac{e+1}{(e-1)^2}}
 \end{aligned}$$

- (c) Nous avons $T(\Omega) = \mathbb{Z}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}([T = n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([T = n] \cap [U = 1])$$

car les événements $[U = 0]$ et $[U = 1]$ constituent un *système complet d'événements*. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{P}([T = n]) &= \mathbf{P}([(2U - 1)Y = n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([(2U - 1)Y = n] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}([-Y = n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([Y = n] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}([Y = -n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([Y = n] \cap [U = 1])
 \end{aligned}$$

Discutons maintenant :

- si $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([T = 0]) &= \mathbf{P}([Y = 0] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([Y = 0] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}([Y = 0]) \mathbf{P}([U = 0]) + \mathbf{P}([Y = 0]) \mathbf{P}([U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}([Y = 0]) \\
 &= 1 - e^{-1}
 \end{aligned} \tag{7}$$

- si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([T = n]) &= \mathbf{P}([Y = -n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([Y = n] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}(\emptyset \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([Y = n] \cap [U = 1]) \text{ car } Y \text{ est une variable positive} \\
 &= \mathbf{P}([Y = n] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}([Y = n]) \mathbf{P}([U = 1]) \text{ par indépendance de } U \text{ et } Y \\
 &= \frac{1}{2} e^{-n} (1 - e^{-1})
 \end{aligned} \tag{8}$$

- si $n \in \mathbb{Z}_-^*$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([T = n]) &= \mathbf{P}([Y = -n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}([Y = n] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbf{P}([Y = -n] \cap [U = 0]) + \mathbf{P}(\emptyset \cap [U = 1]) \text{ car } Y \text{ est une variable positive} \\
 &= \mathbf{P}([Y = -n] \cap [U = 0]) \text{ avec } -n \in \mathbb{N}^* \\
 &= \mathbf{P}([Y = -n]) \mathbf{P}([U = 0]) \\
 &= \frac{1}{2} e^n (1 - e^{-1})
 \end{aligned} \tag{9}$$

Conclusion : selon (7), (8) et (9)

$$\mathbf{P}([T = 0]) = 1 - e^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}([T = n]) = \frac{e^{-|n|}}{2} (1 - e^{-1})$$

4. • _

- (a) Signalons pour commencer que la variable D est associée à la *partie décimale de la variable* X puisque l'on rappelle que $Y = \lfloor X \rfloor$, donc $D = X - \lfloor X \rfloor$. Alors la variable D est à valeurs dans l'intervalle $[0, 1[$ car rappelons encore que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, puisque, par définition $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Par conséquent en notant F_D la fonction de répartition de la variable D nous pouvons immédiatement dire que :

$$\begin{array}{ll}
 F_D(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\
 F_D(t) = 1 & \text{si } t \geq 1
 \end{array}$$

- (b) Comme la famille des événements $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}}$ constitue un *système complet d'événements*

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [0, 1[, [D \leq t] &= [D \leq t] \bigsqcup \Omega \text{ où } \bigsqcup \text{ désigne une union disjointe} \\
 &= ([D \leq t]) \cap \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [Y = n] \right) \\
 &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} ([D \leq t] \cap [Y = n]) \text{ par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
 &= ([D \leq t] \cap [Y = 0]) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([D \leq t] \cap [Y = n]) \right) \\
 &= ([X - Y \leq t] \cap [Y = 0]) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X - Y \leq t] \cap [Y = n]) \right) \\
 &= \left(\underbrace{[X \leq t] \cap [Y = 0]}_{=[X \leq t]} \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X - n \leq t] \cap [n \leq X < n + 1]) \right) \\
 &= ([X \leq t]) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq n + t] \cap [n \leq X < n + 1]) \right) \\
 &= ([X \leq t]) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([n \leq X < \min(n + t, n + 1)]) \right) \\
 &= ([X \leq t]) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([n \leq X < n + t]) \right) \\
 &= ([0 \leq X \leq 0 + t]) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([n \leq X < n + t]) \right) \\
 &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} ([n \leq X < n + t])
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$\forall t \in [0, 1[, [D \leq t] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} ([n \leq X < n + t])$
--

(c) et

(d) Pour tout nombre réel $t \in [0, 1[$ et pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 F_D(t) &= \mathbf{P} \left(\left[\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} ([n \leq X < n + t]) \right] \right) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}([n \leq X < n + t]) \text{ par } \sigma\text{-additivité de } \mathbf{P} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (F_X(n + t) - F_X(n)) \text{ car } X \text{ est une variable à densité} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1 - e^{-(t+n)}) - (1 - e^{-n}) \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} (1 - e^{-t}) \\
 &= (1 - e^{-t}) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^n \text{ somme de série géométrique} \\
 &\quad \text{de raison } \frac{1}{e} \text{ tel que } \left| \frac{1}{e} \right| < 1 \\
 &= \frac{1 - e^{-t}}{1 - \frac{1}{e}} \\
 &= \boxed{\frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}}
 \end{aligned}$$

(e) Faisons le bilan :

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_D = 0$,
- $\lim_{+\infty} F_D = 1$,
- F_D est continue sur $] -\infty, 0[$ (fonction nulle),
- F_D est continue sur $[1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1),
- F_D est continue sur $[0, 1[$ (composition de $t \mapsto -t : \mathcal{C}^0$ sur $[0, 1[$ et $\exp : \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R}),
- $\lim_{0^-} F_D = 0 = \lim_{0^+} F_D = F_D(0)$,
- $\lim_{1^-} F_D = 0 = \lim_{1^+} F_D = F_D(1)$ donc F_D est continue sur \mathbb{R} .

D'autre part F_D est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut être en 0 et 1 ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que D est une variable à densité dont une densité f_D est obtenue par dérivation de F_D sur \mathbb{R}^* nous obtenons f_D une densité de D et nous poserons que $f_D(0) = f_D(1) = 0$. Cela donne :

$$f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in] -\infty, 0[\cup [1, +\infty[\\ \frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } t \in]0, 1[\end{cases}$$

