EM LYON 2007 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EM LYON 2007 S

PREMIER PROBLÈME

Partie I Étude de l'application f.

1. $x \to \dfrac{1}{x}$ et $x \to \ln(1+x)$ sont continues en tout point de $]0,+\infty[$ donc, par produit, f est continue en tout point de $]0,+\infty[$.

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$.

Nous avons alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

2. a. $x \to \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme fonction rationnelle.

$x \to x+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; $\forall x \in]0,+\infty[,\ 1+x \in \mathbb{R}^{+*}$; ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Alors, par composition, $x \to \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Ainsi par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1+x}\,x - \ln(1+x)\right) = \dfrac{A(x)}{x^2}\cdot$

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = \frac{A(x)}{x^2}\cdot}$$

b. Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \mathrm{o}(x)$ donc $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

Au voisinage de 0 on a aussi $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Alors, au voisinage de 0, $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) = (x - x^2) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) = -\dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Donc $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}\cdot$ Alors $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot}$$

c. ▶ Version 1 Avec le théorème de la "limite de la dérivée" (au programme ?).

• f est continue sur $[0,+\infty[$;

• f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

• f' admet une limite finie à droite en 0 qui vaut $-\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $f'(0)=-\dfrac{1}{2}\cdot$

▶ Version 2 : avec le théorème du cours sur le prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Posons $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot$ Tout ce qui précède montre que :

• g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

• g' admet une limite finie à droite en 0.

Alors g se prolonge en une fonction $\hat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Notons que f et $\hat{g}$ coïncident sur $]0,+\infty[$.

Or $\hat{g}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\hat{g}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$. f et $\hat{g}$ coïncident en 0.

Finalement $f=\hat{g}$ et ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

En particulier $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f'(0)=-\frac{1}{2}\cdot}$$

d. $x\to\dfrac{x}{1+x}$ et $x\to\ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ donc A est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ A'(x)=\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1-(1+x)}{(1+x)^2}=-\dfrac{x}{(1+x)^2}\cdot$

A est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ A'(x)<0$ donc A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Notons encore que $A(0)=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right)=-\infty$.

$$\boxed{A \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[,\ A(0)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}A(x)=-\infty.}$$

A étant strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, $\forall x\in]0,+\infty[,\ A(x)<A(0)=0$.

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{A(x)}{x^2}<0$. f étant continue sur $[0,+\infty[$ on peut alors dire que :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

e. $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.
Alors :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

3. a. Rappelons que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}\cdot$

Rappelons également que : A est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[,\ A'(x) = -\dfrac{x}{(1+x)^2}\cdot$

Ainsi A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. $x \to \dfrac{1}{x^2}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, $x \to \dfrac{A(x)}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Ce qui suffit pour dire que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

De plus : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^4}\Big(A'(x)\,x^2 - A(x)\,(2x)\Big) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{x}{(1+x)^2}\,x - 2\left(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right)\right)$.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{x^2 + 2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\right) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\right)$.

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\,\ln(1+x)\right) = \dfrac{B(x)}{x^3}\cdot}$$

b. $x \to -\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2}$ et $x \to 2\ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc B est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ B'(x) = -\dfrac{(6x+2)\,(1+x)^2 - (3x^2+2x)\,2(1+x)}{(1+x)^4} + \dfrac{2}{(1+x)}\cdot$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ B'(x) = -\dfrac{2(3x+1)\,(1+x) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} + \dfrac{2}{(1+x)}\cdot$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ B'(x) = 2\,\dfrac{-(3x^2+4x+1) + (3x^2+2x) + (1+x)^2}{(1+x)^3} = \dfrac{2\,x^2}{(1+x)^3}\cdot$

Alors $\forall x \in [0, +\infty[,\ B'(x) \geqslant 0$. B est croissante sur $[0, +\infty[$. Notons que $B(0) = 0$.

Notons encore que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2}\right) = -3$ car $-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{3x^2}{x^2} = -3$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\,\ln(1+x)\right) = +\infty$.

$$\boxed{B \text{ est croissante sur } [0, +\infty[,\ B(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} B(x) = +\infty.}$$

$B(0) = 0$ et B est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\forall x \in [0, +\infty[,\ B(x) \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3} \geqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur }]0, +\infty[.}$$

Remarque *f est même convexe sur $[0, +\infty[$. En effet f' est continue sur $[0, +\infty[$ et de dérivée positive sur $]0, +\infty[$. Donc f' est croissante sur $[0, +\infty[$ et f est alors convexe sur $[0, +\infty[$.*

Exercice *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et que $f''(0) = \dfrac{2}{3}\cdot$*

4. RAS ! ! Il convient simplement de se rappeler que :

- $f(0) = 1$.
- f est (strictement) décroissante sur $[0, +\infty[$.
- La demi-tangente au point d'abscisse 0 est portée par la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}\,x + 1$.
- La courbe représentative de f est au-dessus de sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Partie II Un développement en série.

---

1. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit t un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k = \sum_{k=0}^{N} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}$ car $-t$ n'est pas égal à 1.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}$ donc $\displaystyle\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\cdot$

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\cdot}$$

2. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

$\displaystyle\forall t\in[0,1],\ \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\cdot$

En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale il vient :

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|1+t|\big]_0^x = \ln(1+x)$ et $\forall k\in[\![0,N]\!]$, $\displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}\cdot$

Alors $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Si } N\in\mathbb{N} \text{ et si } x\in[0,1],\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \text{ où } J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

3. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Comme $0 \leqslant x$, $\displaystyle|J_N(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\right|\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Or $\forall t\in[0,x]$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ et $t^{N+1} \geqslant 0$ donc $\forall t\in[0,x]$, $\dfrac{t^{N+1}}{1+t} \leqslant t^{N+1}$.

Alors $|J_N(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{N+2}}{N+2}$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall N \in \mathbb{N},\ |J_N(x)| \leqslant \frac{x^{N+2}}{N+2}.}$$

4. Soi x un élément de $[0,1]$.

$\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2} \leqslant \dfrac{1}{N+2}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+2} = 0$.

Par encadrement on obtient alors : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$.

Or $\forall N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x)$. Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$.

Alors la série de terme général $\dfrac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$. En translatant on peut dire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n} = \ln(1+x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,1], \text{ la série de terme général } \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n} = \ln(1+x).}$$

Exercice *Montrer que ce résultat vaut encore pour* $x \in]-1,0[$.

Partie III Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

---

1. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ et x un réel de l'intervalle $]0,1]$.

$\left|\ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^{k+1}}{k+1}\right| = |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$. Ce qui donne : $\left|x\,f(x) - x\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

Alors : $x\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right| = |x|\left|f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right| = \left|x\,f(x) - x\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{N+2}}{N+2}$.

En divisant par x qui est strictement positif on obtient : $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{N+1}}{N+2}$.

Notons que $x \to f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}$ et $x \to \dfrac{x^{N+1}}{N+2}$ prennent la valeur 0 en 0 donc l'inégalité précédente vaut encore pour $x = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall N \in \mathbb{N},\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.}$$

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}$.

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$ Alors :

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \left| \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x.$$

Donc $0 \leqslant \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(N+2)^2}.$

$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(N+2)^2} = 0$. Alors par encadrement on obtient : $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}t.}$$

3. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2N+1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{1 \leqslant 2p \leqslant 2N+1} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2N+1} \frac{(-1)^{(2p+1)-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{1 \leqslant 2p \leqslant 2N+1} \frac{(-1)^{(2p)-1}}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } N \text{ de } \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } N \text{ de } \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.}$$

4. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. En soustrayant les deux égalités de Q3 on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 2 \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4\,p^2} \text{ ou } \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$. Alors :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.}$$

Partie IV Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles.

1. Rappelons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Posons que $\forall x \in [0,+\infty[,\ \widehat{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\widehat{F}$ est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

Donc $\widehat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ \widehat{F}'(x) = f(x)$. Ainsi $\widehat{F}'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Finalement $\widehat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$. Alors la restriction F de $\widehat{F}$ à $]0,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle.

Notons aussi que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = f(x)$ et $F''(x) = f'(x)$.

- $u:(x,y) \to xy$, $v:(x,y) \to x$ et $w:(x,y) \to y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ comme fonctions polynômes ;
- $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, u(x,y) > 0,\ v(x,y) > 0$ et $w(x,y) > 0$;
- F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Par composition $(x,y) \to F(xy)$, $(x,y) \to F(x)$ et $(x,y) \to F(y)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

G est alors une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$. Ainsi :

$$\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^2.}$$

Soit (x,y) un élément de $]0,+\infty[^2$.

$\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,F'\big(u(x,y)\big) - \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,F'\big(v(x,y)\big) - \dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y)\,F'\big(w(x,y)\big) = y\,f(xy) - 1\times f(x) - 0\times f(y)$.

$\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = y\,f(xy) - f(x)$. De même $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x\,f(xy) - f(y)$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = y\,f(xy) - f(x) \text{ et } \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x\,f(xy) - f(y).}$$

Soit (x,y) un élément de $]0,+\infty[^2$. En procédant comme pour les dérivées partielles premières on obtient :

$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = y^2 f'(xy) - f'(x)$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}(x,y) = f(xy) + yx\,f'(xy)$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = x^2 f'(xy) - f'(y)$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = y^2 f'(xy) - f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = x^2 f'(xy) - f'(y).}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}(x,y) = f(xy) + yx\,f'(xy).}$$

2. Soit $X = (x,y)$ un élément de $]0,+\infty[^2$.

$$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(xy) - f(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy)}{y} - \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 0 \end{cases}.$$

$\dfrac{\partial G}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \iff \ln(1 + xy) = \ln(1 + x) = \ln(1 + y) = 0 \iff 1 + xy = 1 + x = 1 + y.$

$\dfrac{\partial G}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \iff xy = x = y \iff x = y$ et $x^2 = x \iff x = y = 1$ (car x est strictement positif).

$$\boxed{G \text{ admet } (1,1) \text{ comme unique point critique.}}$$

3. $]0, +\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert.

Ainsi si G admet un extremum en un point de $]0, +\infty[^2$, ce point est un point critique de G c'est donc $(1, 1)$.

Posons $A = (1, 1)$, $r = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(A)$, $s = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y\, \partial x}(A)$ et $t = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(A)$.

$r = 1^2\, f'(1 \times 1) - f'(1) = 0$ et $s = f(1 \times 1) + 1 \times 1\, f'(1 \times 1) = f(1) + f'(1) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}\cdot$

Alors $rt - s^2 = -s^2 = -\dfrac{1}{4} < 0$ donc G n'admet pas d'extremum en $A = (1, 1)$.

$$\boxed{G \text{ n'admet pas d'extremum local.}}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I Étude d'un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de E. $(X^2-1)\,P$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n+2$ donc $\big((X^2-1)\,P\big)''$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n soit un élément de E.

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \text{ de } E,\ \big((X^2-1)\,P\big)'' \text{ est un élément de } E.}$$

2. $\phi(1)=(X^2-1)''=(2X)'=2$. $\phi(X)=\big((X^2-1)\,X\big)''=(X^3-X)''=(3X^2-1)'=6X$.

$$\boxed{\phi(1)=2 \quad \text{et} \quad \phi(X)=6\,X.}$$

3. D'après Q1, ϕ est une application de E dans E.

Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de E.

$\phi(\lambda\,P+Q)=\big((X^2-1)\,(\lambda\,P+Q)\big)''=\big(\lambda\,(X^2-1)\,P+(X^2-1)\,Q\big)''=\lambda\,\big((X^2-1)\,P\big)''+\big((X^2-1)\,Q\big)''$ par linéarité de la dérivation. Ainsi $\phi(\lambda\,P+Q)=\lambda\,\phi(P)+\phi(Q)$.

Finalement ϕ est une application linéaire de E dans E.

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

4. Soit k un élément de $[\![2,n]\!]$.

$\phi(X^k)=\big((X^2-1)\,X^k\big)''=(X^{k+2}-X^k)''=((k+2)\,X^{k+1}-k\,X^{k-1})'=(k+2)(k+1)\,X^k-k(k-1)\,X^{k-2}$.

$$\boxed{\phi(1)=2,\ \phi(X)=6\,X \text{ et } \forall k\in[\![2,n]\!],\ \phi(X^k)=(k+2)(k+1)\,X^k-k(k-1)\,X^{k-2}.}$$

La matrice A de ϕ dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ où : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = (k+2)(k+1)$ et $\forall k \in [\![2, n]\!],\ b_k = -k(k-1)$.

Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ on a encore :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} (j+1)\,j & \text{si } i = j \\ -(j-1)(j-2) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. a. A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donc l'ensemble de ses valeurs propres est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Ainsi $\mathrm{Sp}\,A = \{(i+1)\,i\ ;\ i \in [\![1, n+1]\!]\}$ ou $\mathrm{Sp}\,A = \{(k+2)(k+1)\ ;\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

Posons $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = (k+2)(k+1)$. $\mathrm{Sp}\,\phi = \mathrm{Sp}\,A = \{\lambda_k\ ;\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k - \lambda_{k-1} = (k+2)(k+1) - (k+1)k = 2(k+1) > 0$. Alors $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

ϕ admet $n+1$ valeurs propres distinctes λ_0, λ_1, ..., λ_n avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ où, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, $\lambda_k = (k+2)(k+1)$.

b. $0 < 2 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ donc 0 n'est pas valeur propre de A. Ainsi A est inversible ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\phi \text{ est bijectif.}}$$

c. ϕ est un endomorphisme de E ayant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et E est de dimension $n+1$. Ainsi :

$$\boxed{\phi \text{ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$$

6. k est un élément de $[\![0, n]\!]$ et P est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = (k+2)(k+1)$.

a. Notons r le degré de P et α_r le coefficient de X^r dans P. $r \in [\![0, n]\!]$ et $\alpha_r \neq 0$.

Le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)\,P$ est $\alpha_r\,X^{r+2}$, donc le terme de plus haut degré de $\phi(P)$ est $(r+2)(r+1)\,\alpha_r\,X^r$, c'est à dire $\lambda_r\,\alpha_r\,X^r$.

Or $\phi(P) = \lambda_k\,P$ et le terme de plus haut degré de $\lambda_k\,P$ est $\lambda_k\,\alpha_r\,X^r$ ($\lambda_k \neq 0$).

Ainsi $\lambda_r\,\alpha_r = \lambda_k\,\alpha_r$. α_r n'étant pas nul : $\lambda_r = \lambda_k$. Or $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ donc nécessairement $r = k$.

$\boxed{\text{Si } k \text{ appartient à } [\![0,n]\!] \text{ et si } P \text{ est un vecteur propre de } \phi \text{ associé à la valeur propre } \lambda_k \text{ alors } P \text{ est de degré } k.}$

b. $\lambda_k\, P = \phi(P) = \big((X^2-1)\,P\big)'' = 2\,P + 2(2X)\,P' + (X^2-1)\,P''$ d'après la formule de Leïbniz.

Alors $\lambda_k\, P(-X) = 2\,P(-X) + 2(2\big(-X)\big)\,P'(-X) + (X^2-1)\,P''(-X)$.

Ainsi $\lambda_k\, P(-X) = 2\,P(-X) + 2(2X)\,\big(-P'(-X)\big) + (X^2-1)\,P''(-X)$ $(\star)$.

On a aussi $\phi(Q) = \big((X^2-1)\,Q\big)'' = 2\,Q + 2(2X)\,Q' + (X^2-1)\,Q''$.

Mais comme $Q(X) = P(-X)$, on a : $Q'(X) = -P'(-X)$ et $Q''(X) = P''(-X)$.

Alors $\phi(Q) = 2\,P(-X) + 2(2X)\big(-P'(-X)\big) + (X^2-1)\,P''(-X) = \lambda_k\,P(-X)$ grace à $(\star)$.

Finalement $\phi(Q) = \lambda_k\,Q$; or P étant un vecteur propre de ϕ, P n'est pas le polynôme nul et il en est alors de même pour Q. Par conséquent Q est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

$\boxed{\text{Si } k \text{ appartient à } [\![0,n]\!] \text{ et si } P \text{ est un vecteur propre de } \phi \text{ associé à la valeur propre } \lambda_k \text{ alors le polynôme } Q \text{ défini par } Q(X)=P(-X) \text{ est également un vecteur propre de } \phi \text{ associé à la valeur propre } \lambda_k.}$

7. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$ et U_k un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

U_k est de degré k. Notons u_k le coefficient de X^k dans U_k et posons $V_k = \dfrac{1}{u_k}\,U_k$.

Alors V_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et V_k est encore un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

Notons que V_k engendre le sous-espace propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k (car celui-ci est de dimension 1... et V_k n'est pas le polynôme nul).

Dès lors montrons par "analyse-synthèse" qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k\,P_k(X)$.

• Analyse Supposons que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ soit solution du problème. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$.

P_k est un vecteur propre de ϕ et P_k est de degré k. Donc, d'après Q6 a, P_k est nécessairement un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

Alors il existe un réel α tel que $P_k = \alpha\,V_k$. Or P_k et V_k sont deux polynômes de degré k et de coefficient dominant 1. Ainsi $\alpha = 1$ et $P_k = V_k$.

Par conséquent si $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est solution du problème : $(P_0, P_1, \ldots, P_n) = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$.

D'où l'unicité de la solution.

• Synthèse Posons $(P_0, P_1, \ldots, P_n) = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ et montrons que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est solution du problème.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. Comme $P_k = V_k$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k. Notons également que P_k engendre le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k.

D'après Q6 b, $P_k(-X)$ est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

Ainsi il existe un réel β tel que $P_k(-X) = \beta\, P_k$. Rappelons que P_k est de degré k et de coefficient dominant égal à 1. Ainsi $P_k(-X)$ est de degré k et de coefficient dominant égal à $(-1)^k$. Par conséquent $\beta = (-1)^k$.

Finalement, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k\, P_k(X)$ et P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

Ne reste plus qu'à montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E. Il suffit pour cela de montrer que cette famille est libre car c'est une famille d'éléments de E de cardinal $n+1$ qui est la dimension de E.

$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc cette famille est libre. Ce que l'on peut confirmer en remarquant que c'est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

Ceci achève de montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est solution du problème.

Il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k\, P_k(X)$.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. $P_k(-X) = (-1)^k\, P_k(X)$.

Donc $P_k(-X) = P_k(X)$ si k est pair et $P_k(-X) = -P_k(X)$ si k est impair. Ainsi :

pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, P_k a la parité de k.

8. P_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est 1, donc $P_0 = 1$. P_1 est impair, de degré 1 et son coefficient dominant est 1, donc $P_1 = X$.

P_2 est pair, de degré 2 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel a tel que $P_2 = X^2 + a$.

$\phi(P_2) = \big((X^2-1)\,P_2\big)'' = \big((X^2-1)\,(X^2+a)\big)'' = (X^4 + (a-1)\,X^2 - a)'' = 12X^2 + 2(a-1)$.

Or $\phi(P_2) = \lambda_2\, P_2 = 12\,(X^2+a)$ donc $12X^2 + 2(a-1) = 12\,X^2 + 12a$ et ainsi $2a - 2 = 12a$.

Finalement $a = -\dfrac{1}{5}$ et $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{5}\cdot$

P_3 est impair, de degré 3 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel b tel que $P_3 = X^3 + b\,X$.

$\phi(P_3) = \big((X^2-1)\,P_3\big)'' = \big((X^2-1)\,(X^3+b\,X)\big)'' = (X^5 + (b-1)\,X^3 - b\,X)'' = 20\,X^3 + 6(b-1)\,X$.

Or $\phi(P_3) = \lambda_3\, P_3 = 20\,(X^3 + b\,X)$ donc $20X^3 + 6(b-1)\,X = 20\,X^3 + 20b\,X$ et ainsi $6b - 6 = 20b$.

Finalement $b=-\dfrac{3}{7}$ et $P_3=X^3-\dfrac{3}{7}\,X$.

$$\boxed{\boxed{P_0=1}\quad \boxed{P_1=X}\quad \boxed{P_2=X^2-\frac{1}{5}}\quad \boxed{P_3=X^3-\frac{3}{7}\,X}}$$

Partie II Un produit scalaire sur E.

1. • Soient P et Q deux éléments de E.

$x\to(1-x^2)\,P(x)\,Q(x)$ est continue sur $[-1,1]$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

Ainsi $(.\,|\,.):(P,Q)\to(P\,|\,Q)$ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soient P, Q, R trois éléments de E et λ est un réel.

$(\lambda P+Q\,|\,R)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,(\lambda P+Q)(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,(\lambda P(x)+Q(x))\,R(x)\,\mathrm{d}x.$

$(\lambda P+Q\,|\,R)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\big(\lambda\,(1-x^2)\,P(x)\,R(x)+(1-x^2)\,Q(x)\,R(x)\big)\,\mathrm{d}x.$

$(\lambda P+Q\,|\,R)=\lambda\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,Q(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\,(P\,|\,R)+(Q\,|\,R).$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q,R)\in E^3,\ (\lambda\,P+Q\,|\,R)=\lambda\,(P\,|\,R)+(Q\,|\,R)$. $(.\,|\,.)$ est linéaire à gauche.

• Soient P et Q deux éléments de E.

$(P\,|\,Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,Q(x)\,P(x)\,\mathrm{d}x=(Q\,|\,P).$

$\forall(P,Q)\in E^2,\ (P\,|\,Q)=(Q\,|\,P)$. $(.\,|\,.)$ est symétrique.

• Soit P un élément de E.

$\forall x\in[-1,1],\ (1-x^2)\,P(x)\,P(x)\geqslant 0$ et $-1\leqslant 1$ donc $(P\,|\,P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P(x)\,P(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$

$\forall P\in E,\ (P\,|\,P)\geqslant 0$. $(.\,|\,.)$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $(P\,|\,P)=0$.

$x\to(1-x^2)\,P(x)\,P(x)$ est continue et positive sur $[-1,1]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P(x)\,P(x)\,\mathrm{d}x=0$ et $-1\neq 1$.

Alors $\forall x\in[-1,1],\ (1-x^2)\,P(x)\,P(x)=0$. Ainsi $\forall x\in]-1,1[,\ \big(P(x)\big)^2=0$. Donc $\forall x\in]-1,1[,\ P(x)=0$.

Le polynôme P admet alors une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

$\forall P\in E,\ (P\,|\,P)=0\Rightarrow P=0_E$. $(.\,|\,.)$ est définie.

Les cinq points précédents montrent que :

$$\boxed{(P,Q) \to (P\,|\,Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. a. Soient P et Q deux éléments de E.

Posons $\widehat{P} = \big((X^2-1)\,P\big)'$, $\widehat{Q} = \big((X^2-1)\,Q\big)'$, $\forall t \in [-1,1],\ u(t) = \widehat{P}(t)$ et $v(t) = (1-t^2)\,Q(t)$.

Notons que : $\forall t \in [-1,1],\ v(t) = -(t^2-1)\,Q(t)$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. $\forall t \in [-1,1],\ u'(t) = (\widehat{P})'(t) = \phi(P)(t)$ et $v'(t) = -\widehat{Q}(t)$.

En intégrant par parties on obtient :

$(\phi(P)\,|\,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,\phi(P)(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarquons que $v(1) = v(-1) = 0$; il vient alors : $(\phi(P)\,|\,Q) = -\displaystyle\int_{-1}^{1} u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \widehat{P}(t)\,\widehat{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$

De même $(\phi(Q)\,|\,P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \widehat{Q}(t)\,\widehat{P}(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

$(\phi(P)\,|\,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \widehat{P}(t)\,\widehat{Q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \widehat{Q}(t)\,\widehat{P}(t)\,\mathrm{d}t = (\phi(Q)\,|\,P) = (P\,|\,\phi(Q))$. Donc : $(\phi(P)\,|\,Q) = (P\,|\,\phi(Q))$.

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

b. ϕ est un endomorphisme symétrique de E donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi deux vecteurs propres de ϕ associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

La base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E est alors constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux ; c'est donc une base orthogonale de E.

$$\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } E.}$$

3. Dans toute cette question j est un élément de $[\![1, n]\!]$.

a. $(P_0, P_1, \ldots, P_{j-1})$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. Cette famille est libre (comme sous-famille de la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$) et elle a pour cardinal j qui est la dimension de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$; $(P_0, P_1, \ldots, P_{j-1})$ est donc une base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Or P_j est orthogonal aux éléments de cette base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$ donc P_j est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } S \text{ de degré inférieur ou égal à } j-1, \text{ on a} : (S\,|\,P_j) = 0.}$$

b. 1 est un polynôme de degré inférieur à $j-1$ donc $(1\,|\,P_j)=0$. Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_j(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Supposons que P_j garde un signe constant sur $]-1,1[$. Il en est alors de même pour $x\to(1-x^2)\,P_j(x)$.

$x\to(1-x^2)\,P_j(x)$ étant continue sur $[-1,1]$ on peut alors dire que $x\to(1-x^2)\,P_j(x)$ garde un signe constant sur $[-1,1]$.

Alors $x\to(1-x^2)\,P_j(x)$ est continue et garde un signe constant sur $[-1,1]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_j(x)\,\mathrm{d}x=0$ et $-1\neq 1$.

Ainsi $\forall x\in[-1,1],\ (1-x^2)\,P_j(x)=0$ donc $\forall x\in]-1,1[,\ P_j(x)=0$.

Cela donne à P_j une infinité de racines ce qui est impossible car P_j est de degré j.

$$\boxed{P_j \text{ ne garde pas un signe constant sur }]-1,1[.}$$

c. P_j ne garde pas un signe constant sur $]-1,1[$ donc il existe deux éléments distincts t_1 et t_2 de $]-1,1[$ tels que $P_j(t_1)\,P_j(t_2)<0$.

Or P_j est continue sur $]-1,1[$ donc P_j admet au moins une racine dans $]-1,1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Si toutes les racines de P_j appartenant à $]-1,1[$ sont d'ordre de multiplicité pair alors P_j garde un signe constant sur $]-1,1[$! Finalement :

$$\boxed{P_j \text{ admet au moins, dans l'intervalle }]-1,1[, \text{ une racine d'ordre de multiplicité impair.}}$$

4.Dans toute cette question j est un élément de $[\![1,n]\!]$.

Nous supposerons évidemment que x_1, x_2, ..., x_m sont deux à deux distincts...

a. P_j est de degé j donc P_j a au plus j racines. Ainsi :

$$\boxed{m\leqslant j.}$$

b. Observons que $S_m\,P_j$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ dont les racines appartenant à $]-1,1[$ sont d'ordre de multiplicité pair. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le polynôme } S_m\,P_j \text{ garde un signe constant sur }]-1,1[.}$$

c. Supposons que m est strictement inférieur à j.

La question **3. a.** donne $(S_m\,|\,P_j)=0$ ou $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,S_m(x)\,P_j(x)\,\mathrm{d}x=0$.

$x \to (1-x^2)\, S_m(x)\, P_j(x)$ garde un signe constant sur $]-1,1[$ et est nulle en -1 et 1.

Alors $x \to (1-x^2)\, S_m(x)\, P_j(x)$ est continue et garde un signe constant sur $[-1,1]$.

De plus $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, S_m(x)\, P_j(x)\, \mathrm{d}x = 0$ et $-1 \neq 1$. Par conséquent $x \to (1-x^2)\, S_m(x)\, P_j(x)$ est nulle sur $[-1,1]$.

Alors le polynôme $(1-X^2)\, S_m\, P_j$ admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul.

$(1-X^2)\, S_m\, P_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc ou $(1-X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $S_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $P_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ceci n'est pas donc :

$$\boxed{m = j.}$$

d. Ce qui précède montre que P_j admet au moins j racines distinctes dans $]-1,1[$ et nous avons vu que P_j est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré j.

Alors P_j ne peut pas avoir d'autres racines et ces racines sont nécessairement d'ordre 1. Finalement :

$$\boxed{P_j \text{ admet } j \text{ racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle }]-1,1[.}$$
