Correction EDHEC 2007

Voie économique

La correction comporte 16 pages.

Exercice 1

1. _

(a) Tout d'abord φ est bien une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car φ associe à une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (par définition), une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ${}^tM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ aussi et par *stabilité* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour l'addition, $\varphi(M) = M + {}^tM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'autre part par *linéarité de la transposition* :

$$\begin{aligned}\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \quad \forall (a,b) \in (\mathbb{R})^2, \ \varphi(aA+bB) &= (aA+bB) + {}^t(aA+bB) \\ &= aA + bB + {}^t(aA) + {}^t(bB) \\ &= aA + bB + a{}^tA + b{}^tB \\ &= a\left(A + {}^tA\right) + a\left(B + {}^tB\right) \\ &= a\varphi(A) + b\varphi(B)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

(b) Pour obtenir $A = mat(\varphi, (E_1, E_2, E_3, E_4))$, nous devons chercher les images de E_1, E_2, E_3, E_4 par φ que nous exprimerons en fonction de E_1, E_2, E_3, E_4. Cela donne :

$$\begin{aligned}\varphi(E_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 \\ \varphi(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3 \\ \varphi(E_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3 \\ \varphi(E_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E_4\end{aligned} \tag{1}$$

Ainsi :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

(c) La matrice de φ étant symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. D'autre part comme les colonnes centrales sont égales, A n'est pas inversible. Cela entraîne que :

$$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable et non bijectif}}$$

2. Sans commentaire particulier, nous avons :

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{2A}\end{aligned}$$

Montrons par *récurrence* que pour tout entier naturel non nul : $A^n = 2^{n-1}A$.

- L'initialisation pour $n = 1$ est vérifiée car : $A^1 = 2^0 A$.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition soit vérifiée.
- Nous avons :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \left(2^{n-1}A\right) A \\ &= 2^{n-1}A^2 \\ &= 2^{n-1}2A \\ &= 2^n A \end{aligned}$$

Conclusion : la proposition étant transmissible est héréditaire pour tout entier n non nul selon le premier principe de récurrence. Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = 2^{n-1}A}$$

- –

(a) Par définition :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\varphi &= Vect\left(\varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_3), \varphi(E_4)\right) \\ &= Vect\left(\varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_4)\right) \text{ car } \varphi(E_2) = \varphi(E_3) \\ &= Vect\left(2E_1, E_2 + E_3, 2E_4\right) \\ &= \boxed{Vect\left(E_1, E_2 + E_3, E_4\right)} \end{aligned}$$

Montrons que la famille $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$ (qui est déjà génératrice) est libre. Pour cela montrons que :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad aE_1 + b(E_2 + E_3) + cE_4 = 0 \implies a = b = c = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} aE_1 + b(E_2 + E_3) + cE_4 = 0 &\implies a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Conclusion : selon (2) la famille est libre, et comme elle est génératrice, elle constitue une base de $\operatorname{Im}\varphi$. Comme cette famille est constituée de trois vecteurs, alors :

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}\varphi = 3}$$

(b) Selon le *théorème du rang* :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &= \dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \ker\varphi \\ \text{soit } 4 &= rg(\varphi) + \dim\ker\varphi \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dim\ker\varphi &= 4 - 3 \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

De plus comme $\varphi(E_2) = \varphi(E_3)$ ce qui entraîne que $\varphi(E_2 - E_3) = 0$ puisque φ est linéaire. Ainsi $E_2 - E_3 \in \ker\varphi$ et comme $E_2 - E_3 \neq 0$, (puisque $\dim\ker\varphi = 1$) :

$$\boxed{E_2 - E_3 \text{ est une base de } \ker\varphi}$$

(c) Selon (1) nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi(E_2+E_3) &= \varphi(E_2)+\varphi(E_3) \text{ par linéarité de } \varphi\\ &= 2E_2+2E_3\\ &= 2(E_2+E_3)\end{aligned}$$

et comme $E_2+E_3 \neq 0$ nous pouvons affirmer que :

$$E_2+E_3 \in \operatorname{Im}\varphi \text{ est un vecteur propre de } \varphi \text{ de valeur propre associée } 2 \qquad (3)$$

De même :

$$\varphi(E_1)=2E_1 \quad \text{et} \quad \varphi(E_4)=2E_4$$

comme E_1 et E_4 (deux vecteurs de $\operatorname{Im}\varphi$) sont non nuls, nous pouvons encore affirmer que :

$$E_1 \text{ et } E_4 \text{ sont aussi des vecteurs propres de } \varphi \text{ de valeur propre associée } 2 \qquad (4)$$

(3) et (4) prouvent que :

$$\operatorname{Im}\varphi \subset E_2(\varphi) \qquad (5)$$

donc :

$$\dim E_2(\varphi) \geq \dim \operatorname{Im}\varphi = 3 \qquad (6)$$

Il faut rajouter que 0 est valeur propre de φ avec :

$$\dim E_0(\varphi) = \dim \ker\varphi = 1 \qquad (7)$$

Selon (6) et (7) :

$$\dim E_0(\varphi)+\dim E_2(\varphi) \geq 4$$

et comme l'on sait que la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ est obligatoirement inférieure ou égale à 4, alors :

$$\dim E_0(\varphi)+\dim E_2(\varphi) = 4$$

donc :

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim E_2(\varphi) \qquad (8)$$

Conclusion : selon (5) et (8)

$$\boxed{\operatorname{Im}\varphi = E_2(\varphi)}$$

(d) Résumons-nous :

$$\boxed{\begin{array}{l} sp(\varphi)=\{0,2\}\\ E_0(\varphi)=\ker\varphi \text{ de base } (E_2-E_3)\\ E_2(\varphi)=\operatorname{Im}\varphi \text{ de base } (E_1,\ E_2+E_3,\ E_4)\end{array}}$$

Exercice 2

1. _

(a) Comme la famille $([U=k])_{k\in\{-1,1\}}$ constitue un *système complet d'événements*, la *formule des probabilités totales*, conduit à :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbf{P}([Y\leq x]) &= \mathbf{P}([UX\leq x])\\ &= \mathbf{P}([UX\leq x]\cap[U=-1])+\mathbf{P}([UX\leq x]\cap[U=1])\\ &= \mathbf{P}([-X\leq x]\cap[U=-1])+\mathbf{P}([X\leq x]\cap[U=1])\\ &\quad \text{en remplaçant } U \text{ tour à tour par } -1 \text{ et } 1 \text{ dans } UX\\ &= \mathbf{P}([X\geq -x]\cap[U=-1])+\mathbf{P}([X\leq x]\cap[U=1])\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathbf{P}([Y\leq x])=\mathbf{P}([X\geq -x]\cap[U=-1])+\mathbf{P}([X\leq x]\cap[U=1])}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([Y \leq x]) &= \mathbf{P}([X \geq -x])\,\mathbf{P}([U=-1]) + \mathbf{P}([X \leq x])\,\mathbf{P}([U=1]) \\
&\quad \text{par indépendance des variables } X \text{ et } U \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{P}([X \geq -x]) + \mathbf{P}([X \leq x])\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \mathbf{P}([X < -x]) + \mathbf{P}([X \leq x])\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \Phi(-x) + \Phi(x)\right] \text{ et puisque par propriété : } \forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \\
&\quad \text{où } \Phi \text{ est la fonction répartition de la loi normale centrée réduite suivie par } X \\
&= \frac{1}{2}\left[\Phi(x) + \Phi(x)\right] \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : en notant F_Y la fonction de répartition de Y, nous avons $F_Y = \Phi$ (sur $\mathbb{R}$) et :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$$

2. _

(a) Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1,1\})$ l'espérance de U existe et est nulle.

$$\boxed{\mathbf{E}(U) = 0}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \mathbf{E}\left(X^2 U\right) \\
&= \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}(U) \text{ car du fait de l'indépendance de } U \text{ et } X,\ U \text{ et } X^2 \text{ restent indépendantes} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(XY) = 0}$$

(b) Tout d'abord signalons que puisque X et Y admettent chacune un moment d'ordre deux, la covariance du couple existe. D'autre part par théorème :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) \\
&= 0 \text{ car } \mathbf{E}(XY) = 0 \text{ et } \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0 \text{ comme } X \text{ et } Y \text{ suivent la loi } \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = 0}$$

3. _

(a) On rappelle, d'après le cours, que lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

Par *parité* de l'intégrande $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge aussi et vaut 1. Ainsi :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}} \qquad (9)$$

(b) Comme préconisé, intégrons par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^3 & \Longrightarrow & u'(x) = 3x^2 \\ v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} & \Longleftarrow & v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

avec u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$ pour tout A réel positif. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \left[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}_+,\quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}$$

(c) Par *croissances comparées* (exponentielle-puissance) :

$$\begin{aligned} \lim_{A\to+\infty} A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} &= \lim_{A\to+\infty} \left(A^2\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{A^2}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et comme l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge, $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ existe et est finie, elle vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ d'après (9) .
Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \lim_{A\to+\infty}\left(-A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) \\ &= \lim_{A\to+\infty} - A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + \lim_{A\to+\infty} 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \text{ selon l'algèbre des limites} \\ &= 0 + \frac{3\sqrt{2\pi}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2\pi}}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : comme la limite $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ existe et est finie, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}}$$

(d) X admet un moment d'ordre 4 si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente, ce qui équivaut à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge, par parité de l'intégrande. La question précédente nous assure de la convergence et :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \text{ par parité de l'intégrande} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{3\sqrt{2\pi}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Conclusion : X admet un moment d'ordre 4 noté $\mathbf{E}\left(X^4\right)$ égal à :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X^4\right) = 3}$$

4. _

(a) Remarquons que X^2Y^2 est égale à X^4U^2 avec X^4 et U^2 indépendantes du fait que X et U le sont. Alors comme X^4 et U^2 admettent chacune une espérance, X^4U^2 admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X^4U^2\right) &= \mathbf{E}\left(X^4\right)\mathbf{E}\left(U^2\right)\\ &= 3\left(\mathbf{V}(U)+(\mathbf{E}(U))^2\right) \text{ par le \textit{théorème de Huygens-Koenig}}\\ &= 3\mathbf{V}(U)\\ &= 3\times 1\\ &= 3\end{aligned}$$

car quand $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1,1\})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(U) &= (-1)^2\,\mathbf{P}([U=-1])+(1)^2\,\mathbf{P}([U=1])\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X^2Y^2\right)=3}$$

(b) Comme $\mathbf{E}\left(X^2Y^2\right)$, $\mathbf{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbf{E}\left(Y^2\right)$ existent, la covariance du couple $\left(X^2,Y^2\right)$ existe et vaut:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(X^2,Y^2\right) &= \mathbf{E}\left(X^2Y^2\right)-\mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right)\\ &= 3-1\times 1\\ &= 2\end{aligned}$$

car comme $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$: $\mathbf{E}\left(Y^2\right)=\mathbf{V}(Y)=1$
Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{cov}\left(X^2,Y^2\right)=2}$$

(c) Comme la convariance du couple $\left(X^2,Y^2\right)$ n'est pas nulle :

$$\boxed{\text{les variables } X^2 \text{ et } Y^2 \text{ ne sont pas indépendantes}} \tag{10}$$

C'est la *contraposée* de l'implication :

si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes alors $\operatorname{cov}\left(X^2,Y^2\right)=0$

Supposons, pour finir, que X et Y soient indépendantes, alors X^2 et Y^2 seraient indépendantes aussi, ce qui n'est pas le cas selon ce que nous venons de démontrer en (10). Ainsi :

$$\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

(d) Cet exercice, comme en discret, nous permet de dire que :

> la covariance nulle d'un couple n'implique pas que celui-ci soit forcément constitué de variables indépendantes

Exercice 3

1. _

(a) La fonction $\varphi : x \longmapsto \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x > 0,\ \varphi''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc nous pouvons affirmer que φ est une *fonction concave* sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses tangentes, en particulier, sous sa tangente en 1 d'équation $y = x - 1$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leq x - 1 \ (\textit{inégalité de convexité})$$

ce qui entraîne que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x < x}$$

Nota bene : il y avait aussi une autre méthode, classique, consistant à étudier $\psi : x \longmapsto x - \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à montrer que $\psi(x) > 0$.

(b) Nous savons que $\ln x$ est définie pour tout x strictement positif et nous venons de voir que $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$, ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part f est définie en 0 puisque $f(0) = -1$ selon le texte.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est définie sur } D = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_+}$$

2. _

(a) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions. D'autre part f est continue en 0 car :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x - \ln x} = -1 = f(0)$$

du fait que :

$$\frac{\ln x}{x - \ln x} \underset{0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{\ln x} \text{ puisque } x = \underset{0^+}{o}(-\ln x)$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } D}$$

(b) f est dérivable (à droite) en 0 si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe et est finie. Or :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x + x - \ln x}{x(x - \ln x)} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x(x - \ln x)} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x - \ln x} \\
&= 0 \text{ car } \lim_{x \to 0^+} x - \ln x = +\infty
\end{aligned}$$

Conclusion : comme la limite existe et est finie nous pouvons dire :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 avec } f'_d(0) = 0}$$

3. _

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{x}(x - \ln x) - (\ln x)\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} \\
&= \boxed{\frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}}
\end{aligned}$$

(b) Comme $-\ln x = \underset{+\infty}{o}(x)$ nous pouvons affirmer que :

$$\frac{\ln x}{x-\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$$

avec par *croissances comparées* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-\ln x} = 0}$$

(c) Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de celui de $1-\ln x$ car le dénominateur est strictement positif, et :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Comme $f(1) = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \in [0,1] \\ f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]1,+\infty[\end{array}}$$

5. _

(a) Comme f est continue sur $D = \mathbb{R}_+$, selon la question **2.a,** F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur D en tant qu'unique primitive de f sur D s'annulant en 0 avec :

$$\forall x \in D, \quad F'(x) = f(x)$$

Alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ est décroissante sur } [0,1] \\ F \text{ est croissante sur } [1,+\infty[\end{array}}$$

(b) Nous avons pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt &= \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_1^x \text{ (l'intégrale a un sens du fait de la continuité de l'intégrande sur } [1,x]\text{)} \\ &= \frac{\ln^2 x}{2} \end{aligned}$$

et par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ nous obtenons :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = +\infty}$$

(c) Comme pour tout t de $[1,x]$ avec $x > 1$, $0 < t - \ln t < t$, nous avons :

$$\frac{\ln t}{t-\ln t} > \frac{\ln t}{t} \text{ (car } \ln t \geq 0 \text{ sur } [1,x]\text{)}$$

La continuité des fonctions en jeu sur l'intervalle $[1,x]$ avec $1 < x$ (bornes bien rangées) et la croissance de l'intégrale nous donnent :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t} dt > \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

Enfin par le *théorème de comparaison des limites* quand x tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t} dt = +\infty}$$

Enfin par la *relation de Chasles* :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{\ln t}{t-\ln t}dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}dt \\ &= c + \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}dt \end{aligned}$$

en posant $c = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-\ln t}dt \in \mathbb{R}$ du fait de la continuité de f sur $[0,1]$. Alors par addition des limites :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$$

Problème

1. _

(a) Le programme, une fois complété, est le suivant :

```
Program edhec_2007 ;
Var     z, hasard : integer ;
Begin
     Randomize ; z : = 0 ;
     Repeat z : = z + 1 ; hasard : = random(2) ; until (hasard = 1) ;
     Writeln(z) ;
End.
```

(b) Dans le programme précédent, la variable z est un compteur et à la fin, elle contient le rang du premier "pile" obtenu. La variable z contient donc le nombre de boules présentes dans l'urne. On tire alors une boule au hasard dans cette urne, ce qui est modélisé par random(z) + 1, et X est le numéro de la boule obtenue : l'instruction à rajouter avant la dernière ligne du programme est donc :

```
Writeln('X = ', random(z) + 1) ;
```

2. Pour tout entier k non nul, nous avons d'évidence :

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

où la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge en tant que *série géométrique* de paramètre $\frac{1}{2}$ tel que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Alors le *théorème de majoration appliqué aux séries à termes positifs* nous permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ est convergente}}$$

3. Comme Z est le temps d'attente du premier "pile" lors d'une série illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$, nous pouvons dire que :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

D'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = 2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Z) = 2}$$

4. _

(a) Vu la description de l'expérience, il est clair que la loi de X, sachant que l'événement $[Z = k]$ est réalisé, est la loi uniforme sur l'intervalle $[|1, k|]$. En effet lorsque l'événement $[Z = k]$ est réalisé, on se retrouve face à une urne constituée de k boules numérotées de 1 à k dont on en tire qu'une seule. Ainsi :

$$\boxed{\forall (i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}_{[Z=k]}([X=i]) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si} \quad i > k \end{cases}}$$

(b) Comme la famille d'événements $([Z = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ constitue un *système complet d'événements*, la *formule des probabilités totales* nous donne que :

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbf{P}([X=i]) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_{[Z=k]}([X=i])\,\mathbf{P}([Z=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{P}_{[Z=k]}([X=i])\,\mathbf{P}([Z=k]) + \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbf{P}_{[Z=k]}([X=i])\,\mathbf{P}([Z=k]) \\
&= 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbf{P}_{[Z=k]}([X=i])\,\mathbf{P}([Z=k]) \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbf{P}_{[Z=k]}([X=i])\,\mathbf{P}([Z=k]) \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X=i]) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}} \tag{11}$$

(c) En admettant que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} a_{i,k}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=i]) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \quad \text{somme d'une série géométrique de raison } \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

5. _

(a) Pour tout entier naturel i non nul, nous avons :

$$\forall n \geq i,\ i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ car } k \geq i \Longrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{i}$$
$$\Longrightarrow\ i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{i}{i}\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$\Longrightarrow\ i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Le *théorème de prolongement des inégalités* donne :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k &\leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ limite d'une somme partielle de série géo. convergente}\\
\text{soit } i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k &\leq \sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
\text{ou encore } i\mathbf{P}\left([X=i]\right) &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\quad i\mathbf{P}\left([X=i]\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}$$

(b) Comme la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ converge en tant que *série géométrique* de raison $\frac{1}{2}$, en valeur absolue strictement inférieure à 1, la série de terme général positif $i\mathbf{P}\left([X=i]\right)$ converge aussi, selon le *théorème de majoration appliqué aux séries à termes positifs.* Ainsi :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance}}$$

(c) Par définition, $\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbf{P}\left([X=i]\right)$ et comme la permutation des symboles de sommation est licite, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbf{P}([X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} i \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{par changement d'indice} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) \quad \text{somme de \textit{série dérivée de la série géométrique de raison} } \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{3}{2}}$$

6. _

(a) X admet un moment d'ordre deux noté $\mathbf{E}\left(X^2\right)$ si et seulement si la série de terme général $i^2\mathbf{P}([X=i])$ est convergente, et en cas de convergence, $\mathbf{E}\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\mathbf{P}([X=i])$. Or pour tout entier i non nul, selon la question **5.a** :

$$i^2\mathbf{P}([X=i]) \leq i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

et $i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ est le terme général d'une série convergente en tant que *série dérivée de la série géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ en valeur absolue strictement inférieure à 1. Ainsi selon le *critère de majoration appliqué aux séries à termes positifs*, la série de terme général $i^2\mathbf{P}([X=i])$ converge aussi. De cela résulte que :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X^2\right) \text{ existe}}$$

(b) Par définition :

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\mathbf{P}([X=i])$$

et en admettant encore qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} i^2 \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} i^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

(c) Cherchons trois réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$$

- Pour $k = 0$ (cette valeur confortable ne pose aucun problème) nous obtenons $c = 1$,
- pour $k = 1$ nous obtenons $6 = b + 1$ soit $b = 5$,
- puis en identifiant membre à membre les coefficients de k^2, nous obtenons $a = 2$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k+1)(2k+1) = 2k(k-1) + 5k + 1} \qquad (12)$$

(d) Selon (12) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} (2k(k-1) + 5k + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{2}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\quad \text{la séparation étant légitime car toutes les séries en jeu convergent} \\
&= \frac{2}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{5}{6}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{5}{12}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{12}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{5}{12}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Comme X admet un moment d'ordre deux, X admet une variance égale selon le *théorème de Huygens-Koenig* à :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}(X))^2\\ &= \frac{19}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\\ &= \boxed{\frac{11}{12}}\end{aligned}$$

7. _

(a) Comme la variable X admet une espérance et une variance, on peut lui appliquer l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* qui est :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]\right) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

ce qui donne :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{11}{12\varepsilon^2}} \tag{13}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}\left(\left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \varepsilon\right]\right) &= \mathbf{P}\left(\left[X - \frac{3}{2} \geq \varepsilon\right] \biguplus \left[X - \frac{3}{2} \leq -\varepsilon\right]\right) \quad (\biguplus \text{ union disjointe})\\ &= \mathbf{P}\left(\left[X - \frac{3}{2} \geq \varepsilon\right]\right) + \mathbf{P}\left(\left[X - \frac{3}{2} \leq -\varepsilon\right]\right) \quad \text{par } \sigma - \text{additivité}\\ &\geq \mathbf{P}\left(\left[X \geq \varepsilon + \frac{3}{2}\right]\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Alors en particulier pour $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$ nous obtenons selon (13) et (14) que :

$$\mathbf{P}\left(\left[X \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{11}{12\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

ce qui entraîne que :

$$\mathbf{P}\left([X \geq 3]\right) \leq \frac{11}{12 \times \frac{9}{4}}$$

soit encore :

$$\boxed{\mathbf{P}\left([X \geq 3]\right) \leq \frac{11}{27}}$$

8. _

(a) Par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k\\ &= \boxed{\frac{1-x^n}{1-x}}\end{aligned}$$

Explication : c'est une *somme géométrique* de raison x, différente de 1, contenant n termes, et de premier terme 1.

(b) Comme les deux fonctions $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1-x^n}{1-x}$ sont continues sur le segment $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (respectivement en tant que fonction polynomiale et fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) nous pouvons les intégrer sur cet intervalle, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}dx \\
\text{soit } \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
\text{ou encore } \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{2}} &= \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx}$$

(c) Comme l'application $\delta : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ ($\delta' > 0$ sur cet intervalle), nous pouvons donc majorer δ par $\delta\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ sur ce segment. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \delta\left(\frac{1}{2}\right)dx \\
&\leq 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&\leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{car } n \geq 1 \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Autre méthode (rapidement) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{2}\right)^n dx \text{ car } x \longmapsto x^n \text{ est croissante sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_0^{\frac{1}{2}} \delta(x)\,dx \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_0^{\frac{1}{2}} 2dx \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Enfin la positivité de l'intégrale est évidente par positivité de l'intégrande, et les bornes d'intégration sont bien rangées.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Par le *théorème d'encadrement* comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ du fait que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx = 0}$$

(d) Selon (11) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=1]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ car la série converge} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx\right) \\
&= \ln 2 - \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx \\
&= \ln 2 - 0 \\
&= \boxed{\ln 2}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=2]) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \boxed{\ln 2 - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(e) Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X\geq 3]) &= 1 - \mathbf{P}([X<3]) \\
&= 1 - \mathbf{P}([X=1]) - \mathbf{P}([X=2]) \\
&= 1 - \left(\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \boxed{\frac{3}{2} - 2\ln 2} \\
&\simeq \frac{3}{2} - 1.4 \\
&\simeq \boxed{0.1}
\end{aligned}$$

L'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* nous a montré que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X\geq 3]) &\leq \frac{11}{27} \\
\text{soit } \mathbf{P}([X\geq 3]) &\leq 0.41
\end{aligned}$$

La majoration peut paraître décevante (majorant quatre fois plus grand que la valeur approchée) mais cela est normal, car l'on sait que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est grossière du fait qu'elle est valable pour toutes sortes de variables, du moment qu'elles admettent une espérance et une varinace.

✠✠✠✠✠