Concours Communs Polytechniques - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'analyse- Filière MP

Séries entières, équations différentielles et transformée de Laplace

Corrigé par M.TARQI `http://alkendy.x10.mx`

Exercice 1

1. La règle de D'Alembert montre que $R = 1$.

2. On a $\dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$ et comme les deux séries $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ ont le même rayon de convergence $R = 1$, alors

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

ou encoure

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad S(x) = -x\ln(1-x) + \frac{1}{x}(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = \frac{1+x}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2},$$

et $S(0) = 0$.

3. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{2x^n}{n^2-1}$, on a $|u_n(x)| \leq \dfrac{2}{n^2-1}$ et comme la série numérique $\sum \dfrac{2}{n^2-1}$ converge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$ et comme les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, alors la fonction S est continue sur $[0,1]$, en particulier

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{n^2-1} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2

1. L'équation différentielle (E) s'écrit encore, pour tout $x > 0$,

$$y' - \frac{3}{2x}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La solution homogène est $y_h(x) = \lambda e^{\frac{3}{2}\ln x} = \lambda x^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, en effet $y_p(x) = \lambda(x)x^{\frac{3}{2}}$ est solution de (E) si et seulement si $2x^2\lambda'(x) = 1$, donc $\lambda(x) = \dfrac{-1}{2x} + \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$. D'où les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont de la forme : $y(x) = \mu x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Supposons que (E) admet des solutions sur $[0,+\infty[$ et soit y une parmi elles, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \mu x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ pour tout $x > 0$. Mais cette fonction n'est pas dérivable à droite de 0 (une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ est une fonction dérivable à droite de 0), ce qui est absurde.
Donc l'ensemble de solutions de (E) sur $[0,+\infty[$ est vide.

Problème

AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1. **Question préliminaire**
   (a) $(i) \Longleftrightarrow (ii)$
   (b) $(i) \Longrightarrow (ii)$

Partie I : Exemples et propriétés

2. (a) Soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $f + \lambda g \in E$ et par conséquent E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

   (b) Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrons que $F \subset E$ pour conclure. Soit $f \in F$, alors il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| \leq M$ et donc

$$\forall x > 0, \ \ |f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$$

   et comme la fonction $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors il est de même de la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ et donc $f \in E$.

   (c) Pour tout couple $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt$$

   et donc

$$\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda\mathcal{L}(g)$$

   Ainsi $\mathcal{L}$ est linéaire.

3. (a) Soit $x > 0$. $\mathcal{L}(U)(x) = \lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A e^{-xt}dt = \lim\limits_{A\to\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A = \frac{1}{x}$

   (b) Soient $x > 0$ et $A > 0$, alors :

$$\int_0^A e^{-\lambda t}e^{-xt} = \int_0^A e^{-(\lambda+x)t} = \left[\frac{e^{-(\lambda+x)}}{-\lambda - x}\right]_0^A = \frac{1}{\lambda + x}\left(1 - e^{-(\lambda+x)A}\right)$$

   Donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A e^{-\lambda t}e^{-xt}dt = \frac{1}{x + \lambda}$ et par conséquent $h_\lambda \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda + x}.$$

4. Pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n e^{\frac{-xt}{2}} = 0$, donc on peut trouver $A > 0$ tel que $t^n e^{\frac{-xt}{2}} \leq 1$ pour tout $t \geq A$ et donc $t^n e^{-xt} \leq e^{\frac{-xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$, donc pour tout $t \geq A$,

$$|g_n(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|e^{\frac{-xt}{2}},$$

   ainsi $t \longmapsto g_n(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $g_n \in E$.

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée.** Soient $x \in \mathbb{R}$, $(\varepsilon, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, une intégartion par parties donne

$$\int_\varepsilon^A f'(t)e^{-xt}dt = [f(A)e^{-xA} - f(\varepsilon)e^{-x\varepsilon}] + x\int_\varepsilon^A f(t)e^{-xt}dt.$$

Or d'après les hypothèses, les fonctions f et f' admettent chacune une limite à droite en 0, d'où en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$(*)\qquad \int_0^A f'(t)e^{-xt}dt = [f(A)e^{-xA} - f(0)] + x\int_0^A f(t)e^{-xt}dt.$$

Le terme à droite dans la relation $(*)$ admet une limite finie quand A tend vers l'infini, car :
- $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)e^{-xt}dt$ existe car $f\in E$.
- $\lim\limits_{A\to+\infty}[f(A)e^{-xA} - f(0)]$ existe aussi car f est bornée.

En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0),$$

pour tout $x>0$.

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**

   (a) Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où $u_n(x) = \int_n^{n+1} f(t)e^{-xt}dt$.

   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les applications

     $$\begin{array}{llll}\varphi_n : & [n,n+1]\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & (x,t) & \longmapsto & f(t)e^{-xt}\end{array}$$

     et

     $$\begin{array}{llll}\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x} : & [n,n+1]\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & (x,t) & \longmapsto & -tf(t)e^{-xt}\end{array}$$

     sont continues, donc U_n est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x>0$,

     $$U_n'(x) = -\int_n^{n+1} tf(t)e^{-xt}dt$$

   - Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<b<a$. Alors pour $x\geq a$ et $t\geq 0$, on a

     $$|tf(t)e^{-xt}| \leq t|f(t)|e^{-at} \leq |f(t)|e^{-bt}te^{-(a-b)t}.$$

     La fonction $t\longmapsto te^{-(a-b)t}$ étant continue sur $[0,+\infty[$ et tend vers 0 à l'infini, donc elle est bornée par une constante positive K, d'où

     $$|tf(t)e^{-xt}| \leq K|f(t)|e^{-bt}.$$

   - $\forall x\geq a$, on a

     $$|U_n'(x)| \leq \int_n^{n+1} |tf(t)e^{-xt}|dt \leq K\int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt}dt = Kv_n,$$

     avec $v_n = \int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt}dt$. La série $\sum v_n$ est convergente, car

     $$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = \int_0^n |f(t)|e^{-bt}dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-bt}dt$$

     donc la série $\sum U_n'$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$. On a donc

- •• $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
- •• La série $\sum U_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $\mathcal{L}(f)$.
- •• La série $\sum U_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

Donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$,

$$\mathcal{L}(f)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U'(x) = \int_0^{+\infty} (-tf(t))e^{-xt}dt = -\int_0^{+\infty} g_1 e^{-xt}dt,$$

ou encore

$$\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1).$$

(b) De même on peut montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}dt = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)(x).$$

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

7. (a) Soit $A>0$, f est continue sur $[0,A]$, donc bornée sur $[0,A]$ et il existe $M>0$ tel que $\forall t \in [0,A]$, $|f(t)| \leq M$ et par suite

$$\int_0^A f(t)e^{-xt}dt \leq M\int_0^A e^{-xt}dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt}dt = 0$.
D'autre part, Soit $a>0$ fixé et $x>a$, alors on a :

$$\left|\int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t)e^{-at}|e^{(a-x)t}dt \leq e^{(a-x)A}\int_A^{+\infty} |f(t)e^{-at}|dt$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(a-x)A} = 0$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0$.
On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0.$$

(b) *Théorème de la valeur initiale.* D'après la question 5, on a pour tout $x>0$,

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

et comme f' est bornée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f') = 0$ (d'après 7(a)) et donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0).$$

8. **Théorème de la valeur finale**

(a) Soit $A>0$ tel que $|f(t)| \leq 1+|l|$ pour tout $t \geq A$ et soit $M = \sup\limits_{t\in[0,A]} |f(t)|$ (f est continue sur le segment $[0,A]$), alors $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$ où $M = \max(1+|l|, M)$. Ainsi f est bornée et donc $f \in F$.

(b) Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} h_n(x)dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right) dx, \qquad \text{poser } x = a_n t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-a_n t} f(t) a_n dt = a_n \mathcal{L}(f)(a_n)\end{aligned}$$

(c) La suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \longmapsto le^{-x}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $|h_n(x)| \leq Me^{-x}$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)dx = l \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = l.$$

(d) Si $l \neq 0$, alors $\mathcal{L}(f)(a_n) \sim \frac{l}{a_n}$ et ceci pour tout suite à termes positifs qui converge vers 0 et donc $\mathcal{L}(f)(x) \sim \dfrac{l}{x}$ en 0.

9. (a) On a $\forall x \geq 0, \quad R(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{x} f(t)dt$, donc R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $R'(x) = -f(x)$.
D'autre part, f étant dans E, donc R' aussi et par suite pour tout $x > 0$,

$$x\mathcal{L}(R)(x) - R(0) = \mathcal{L}(R')(x) = -\mathcal{L}(f)(x),$$

ou encore

$$\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x).$$

(b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} R(t) = 0$, donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|R(t)| \leq \varepsilon$. D'autre part,

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x\mathcal{L}(R)(x)| \leq x\left(\int_0^A R(t)e^{-xt}dt + \int_A^{+\infty} R(t)e^{-xt}dt\right) \\ &\leq x\int_0^A |R(t)|dt + x\int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt}dt \\ &\leq x\int_0^A |R(t)|dt + x\int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-xt}dt \\ &\leq x\int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon\end{aligned}$$

(c) Soit $\alpha > 0$ tel que $0 < x < \alpha$ entraîne $x\displaystyle\int_0^A |R(t)|dt \leq \varepsilon$ et donc

$$0 < x < \alpha \Longrightarrow |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon,$$

ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0)$ et donc $\mathcal{L}(f)$ se prolonge en 0 par $R(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Partie III : Application

10. (a) La quantité $\int_0^1 f(t)dt$ est bien définie puisque f est continue sur $[0,1]$. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$, et la fonction $x \longmapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, car $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}$ existe. Il en résulte que $\lim_{x \longmapsto \infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe.

(b) On a :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Comme la série harmonique est divergente, il est de même de la série $\sum u_n$, ceci montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ est divergente. Donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned}
(*) \quad \int_0^A (\sin t)e^{-xt}dt &= \operatorname{Im}\left(\int_0^A e^{(i-x)t}dt\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^A\right) \\
&= -\frac{1}{1+x^2}(e^{-xA}(x\sin A + \cos A) - 1)
\end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto (\sin t)e^{-xt}$ est dominé par la fonction intégarble $t \longmapsto e^{-xt}$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Le terme à droite dans $(*)$ tend vers $\frac{1}{1+x^2}$ quand A tend vers l'infini, ainsi

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A (\sin t)e^{-xt}dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

(d) Soit $H(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ avec $x > 0$. H est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto H(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{t \to +\infty} H(t)e^{-xt} = 0$, donc par une intégration par parties

$$\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = x\int_0^{+\infty} H(t)e^{-xt}dt$$

d'où

$$(**) \quad \mathcal{L}(f)(x) = x\mathcal{L}(H)(x)$$

La transformée $\mathcal{L}(H)$ est définie au moins sur $]0,+\infty[$ et continue sur $]0,+\infty[$: en effet, si on fixe $x_0 > 0$, la fonction $t \longmapsto H(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathcal{L}(H)$ sur $[x_0,+\infty[$. Grace à $(**)$, on déduit la continuité

de $\mathcal{L}(H)$ et donc de $\mathcal{L}(f)$ sur $]0,+\infty[$.
Enfin

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{t\to+\infty} H(t) = \lim_{x\to 0} x\mathcal{L}(H) = \lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x).$$

Considérons la fonction $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$ qui est continue sur $[0,+\infty[$. Montrons que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, en effet, posons $g(x,t) = e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$ et si $x > a$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at},$$

ceci prouve que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0,+\infty[$ et

$$\Phi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\Phi(x) = c - \arctan x$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$, car $\left|e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}\right| \leq e^{-xt}$ et donc $|\Phi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, ainsi $c = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0,\ \ \Phi(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0)$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

●●●●●●●●●●●●●