Corrigé de l'épreuve Math A de E3A, PSI 2012

Luc Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes.

Marges : 1cm=haut=bas=gauche=droite

Questions d'applications du cours

On devait répondre vrai ou faux sauf 2.d.).

Ce corrigé a **trop d'arguments**, destinés à la compréhension par les étudiants, mais non demandés sur la copie.

$\mathcal{E}_{a,b}$ est l'espace vectoriel des suites **réelles** qui vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

Rappelons le cours : $\mathcal{E}_{a,b}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, isomorphe à $\mathbb{R}^2$ par l'application Φ qui à $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ associe le couple des valeurs initiales (u_0, u_1). On peut chercher les suites géométriques non nulles qui vérifient la récurrence : $\left(u = (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_{a,b}\right) \iff \left(r^2 = ar + b\right)$

Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$, on a deux suites réelles $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui forment une base (on vérifie la liberté).

Si $\Delta = 0$, on peut utiliser comme base : $\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Si $\Delta < 0$, on peut combiner les deux suites complexes $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r_1 = p + iq = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$, avec $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ pour obtenir une base de $\mathcal{E}_{a,b}$ avec $u_1 = (\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_2 = (\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention aux énoncés **logiques** (conditions nécessaires ou suffisantes)

Question 1. a.) Faux : si $\Delta < 0$ b.) Vrai : cela suffit car $r^2 + 3r - 4 = (r+4)(r-1)$

c.) Faux : il y a d'autres cas. d.) Faux : une seule, la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

e.) Vrai : c'est une condition nécessaire (mais non suffisante)

Question 2. a.) Faux : toujours bijective. c.) Faux : toujours égale à 2.

b.) Vrai : g est linéaire entre deux espaces de dimension 2. Si $a \neq 0$, il y a un seul $u_1 = \dfrac{1}{a}(u_2 - bu_0)$ qui convienne et g injective donc bijective.

2.d.) On a l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$ dont les racines complexes sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$u_1 = \left(\cos(\dfrac{2n\pi}{3})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_2 = \left(\sin(\dfrac{2n\pi}{3})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$ car ce sont des combinaisons linéaires de $(j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(j^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui la vérifient. De plus elles forment une famille libre car leurs valeurs intiales sont respectivement $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Elles constituent une base (dim 2).

Question 3. a.) Faux : On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, donc $\boxed{R = \dfrac{1}{e}}$

b.) La "déduction" est fausse. c.) Vrai : $\dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{2}$.

Question 4. a.) Faux : On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ mais on en déduit $r \geqslant 1$ car on a ACV pour tout $x < 1$.

b.) Vrai.

c.) Vrai : soit r_2 le rayon de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin(n)x^{n-1}$. On a ACV pour $x < 1$, car $|\sin(n)x^{n-1}| \leqslant |x|^{n-1}$ série géométrique convergente pour $x < 1$. Pour $x = 1$, on a divergence grossière car $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin(n) \neq 0$.

Donc $r_2 = 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est la série des primitives de celle-ci, elle a même rayon : $r = 1$

d.) Vrai, car $r = 1$. e.) Presque mais faux : $S(0) = 0$. f.) Faux. g.) Faux.

On peut détecter que f.) et g.) sont fausses, car par dérivation des fonctions proposées, on ne retrouve pas $S'(x)$.

Pour le calcul : Soit $\displaystyle S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} x^n$, on a $\displaystyle S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,dt$ et $\sin(n) = \dfrac{1}{2i}[e^{in} - e^{-in}]$.

Pour $t \neq 0$: $\displaystyle S'(t) = \frac{1}{2it}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(e^i t)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-i}t)^n\right] = \frac{1}{2it}\left[\frac{e^i t}{1 - e^i t} - \frac{e^{-i}t}{1 - e^{-i}t}\right] = \frac{\sin(1)}{1 - 2\cos(1)t + t^2}$

ce qui est aussi vrai en $t = 0$. Avec $S(0) = 0$, on a donc $\displaystyle S(x) = \int_0^x \frac{\sin(1)\,dt}{1 - 2\cos(1)t + t^2} = \int_{-\cos(1)}^{x-\cos(1)} \frac{\sin(1)\,du}{u^2 + \sin^2(1)}$

par changement de variable $u = t - \cos(1)$, puis avec $v = \dfrac{u}{\sin(1)}$: $\displaystyle S(x) = \int_{-\frac{\cos(1)}{\sin(1)}}^{\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}} \frac{dv}{v^2 + 1}$

Enfin : $\boxed{S(x) = \arctan\left(\dfrac{x - \cos(1)}{\sin(1)}\right) - \arctan\left(\dfrac{-\cos(1)}{\sin(1)}\right) = \arctan\left(\dfrac{x - \cos(1)}{\sin(1)}\right) + \dfrac{\pi}{2} - 1 \text{ sur }]-1,1[}$

Notons que $\ln|1 - xe^i| = \dfrac{1}{2}\ln\left((1 - \cos(1)x)^2 + \sin^2(1)x^2\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1 - 2\cos(1)x + x^2)$

Problème   Partie A

On travaille sur $\mathcal{S}_0 = \left\{u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\right\}$.

Question 1.1.) L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, de racines $r_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $r_2 = -i = \overline{r_1}$

Donc $\boxed{\mathcal{S}_0 \text{ admet pour base la famille des deux suites : } \lambda = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \mu = \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}}$

On peut aussi vérifier, en distiguant selon la parité de n, que la relation est assurée.

Question 1.2.) Elles sont toutes les **deux** 4-**périodiques**.

Question 2.) C'est un résultat de cours que l'on peut assurer, en disant que $\mathcal{S}_0$ contient la suite constante nulle, et qu'il est stable par combinaison linéaire.

Question 3.) Vu plus haut : (λ, μ) est une base de $\mathcal{S}_0$ et $\boxed{\dim(\mathcal{S}_0) = 2}$

Question 4.1.) Toutes les suites de $\mathcal{S}_0$ sont donc 4-périodiques. Si une suite p-périodique avec $p \in \mathbb{N}^*$ est conver--gente vers ℓ, elle est constante égale à ℓ. En effet, pour tout n_0 de $\mathbb{N}$, la suite extraite $(u_{n_0+pk})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_{n_0} et convergente vers ℓ, ainsi $u_{n_0} = \ell$. Si la suite $u = \alpha\lambda + \beta\mu$ de $\mathcal{S}_0$ est convergente, elle est donc constante. Mais alors $u_0 = u_1 = u_2 = u_3$ assure que $\alpha = \beta = -\alpha = -\beta$. Donc u est nulle.

$\boxed{\text{Les suites } u \text{ non nulle de } \mathcal{S}_0 \text{ ne sont pas convergentes}}$

Question 4.2.) La série $\sum u_n$ ne peut **pas alors être convergente**, car elle ne vérifie pas la condition nécessaire : que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 4.3.) On a donc $u = \alpha\lambda + \beta\mu$ pour toute suite u de $\mathcal{S}_0$, et $\alpha = u_0,\ \beta = u_1$.

Distinguons selon la parité de n : $\begin{cases} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ si } n \text{ impair et } \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \text{ si } n \text{ pair, } n = 2p. \\ \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ si } n \text{ pair et } \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \text{ si } n \text{ impair, } n = 2p+1. \end{cases}$

On a donc un rayon de convergence $R = 1$ et $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,1[}$ pour $(u_0, u_1) \neq (0,0)$,

avec ACV pour $|x| < 1$, et divergence grossière en $x = 1$ et $x = -1$.

La série entière $\sum \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n$ est de rayon de convergence $R = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Et $\sum \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n$ est de rayon de convergence $R = 1$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p+1} = \dfrac{x}{1+x^2}$.

$\boxed{\text{et } f(x) = \dfrac{u_0 + u_1 x}{1+x^2} \text{ sur }]-1,1[}$

Partie B

Question 1.1.) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$, alors $u_{n+2} + u_n = 2(-1)^n$ n'est pas constante donc $\boxed{u \notin \mathcal{S}}$.

Question 1.2.) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{E(n/2)}$, alors si n est pair $n = 2p$, $u_{n+2} + u_n = (-1)^{p+1} + (-1)^p = 0$

si n est impair $n = 2p+1$, $u_{n+2} + u_n = (-1)^{p+1} + (-1)^p = 0$

Et donc $\boxed{u \in \mathcal{S}, \text{ pour } a = 0}$ Elle est dans $\mathcal{S}_0$, et $\boxed{u = \lambda + \mu}$

Question 1.3.) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5$, alors $u_{n+2} + u_n = 2a$ avec $\boxed{a = 5 \text{ constante donc } u = (5)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}}$.

Question 2.) Comme ci-dessus, les suites constantes sont dans $\mathcal{S}$, à chaque fois pour a égale la constante u_0.

Question 3.) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n$, alors $u_{n+2} + u_n = r^n(r^2+1)$ est constante si et seulement si $r = 0$ ou $r = 1$. Sinon $r = -1$, ou $|r|^n \to 0$ ou $|r|^n \to \infty$ et r^n n'est pas constante. Nous considèrerons la constante nulle comme géométrique. $\boxed{\text{Les seules suites géométriques de } S \text{ sont les suites constantes } (0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (1)_{n\in\mathbb{N}}}$

Question 4.) $\mathcal{S}$ contient la suite constante nulle (avec $a = 0$) et $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire.

En effet, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathcal{S}^2$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} + u_n = 2a \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_{n+2} + v_n = 2b \end{cases}$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ (\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}) + (\alpha u_n + \beta v_n) = 2(\alpha a + \beta b)$ donc $\boxed{\alpha u + \beta v \in \mathcal{S} \text{ avec la constante } \alpha a + \beta b}$.

Question 5.) La suite constante $u = (5)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{S}$ mais pas dans $\mathcal{S}_0$. Par contre $\boxed{\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}}$ avec $a = 0$.

Question 6.) φ est linéaire de S dans $\mathbb{R}$, avec $\varphi(\alpha u + \beta v) = \dfrac{1}{2}(\alpha u_0 + \beta v_0 + \alpha u_2 + \beta v_2) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$ c'est donc une forme linéaire. φ n'est pas identiquement nulle, donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{S}$, et : $(u \in \ker(\varphi)) \Leftrightarrow \left(u \in \mathcal{S} \text{ et } u_2 + u_0 = 0\right) \Leftrightarrow \left(u \in \mathcal{S} \text{ et } a = 0\right) \Leftrightarrow (u \in \mathcal{S}_0)$. Donc $\boxed{\ker(\varphi) = \mathcal{S}_0}$

Question 7.) Puisque $\dim(\mathcal{S}_0) = 2$ alors $\boxed{\dim(\mathcal{S}) = 3}$ car on a un hyperplan de dimension 2.

Si $v = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, on a vu que $v \in \mathcal{S}$, et que $v \notin \mathcal{S}_0$ l'hyperplan, donc on a $\boxed{\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(v) \oplus \mathcal{S}_0}$

Car si une droite n'est pas incluse dans un hyperplan, elle est un supplémentaire de cet hyperplan.

Question 8.) Toute suite u de $\mathcal{S}$ se décompose donc sur la base adaptée à la somme directe (v, λ, μ) et avec les conditions initiales, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{u_0 - u_2}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \left(u_1 - \dfrac{u_0 + u_2}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \dfrac{u_0 + u_2}{2}}$

On a alors $\boxed{a = \dfrac{u_0 + u_2}{2}}$ pour cette suite u de $\mathcal{S}$.

Question 9.) Les trois suites de la base sont 4-périodiques, donc $\boxed{\text{toutes les suites de } \mathcal{S} \text{ sont 4-périodiques}}$

Question 10.) L'application θ est **linéaire** (clair) entre espaces vectoriels de **même dimension finie**.

De plus, elle est **injective**, puisque si deux suites de $\mathcal{S}$ ont les mêmes valeurs initiales (u_0, u_1, u_2) alors, avec le résultat de **B.8.**) elles sont égales. Ainsi $\boxed{\theta \text{ est un isomorphisme entre } \mathcal{S} \text{ et } \mathbb{R}^3}$

Question 11.) On a alors pour premiers termes, avec $u_3 = -\left(u_1 - \dfrac{u_0 + u_2}{2}\right) + \dfrac{u_0 + u_2}{2} = u_0 - u_1 + u_2$

$I :\quad i_0 = 1 \quad i_1 = 0 \quad i_2 = 0 \quad i_3 = 1$ puis $i_4 = i_0 = 1$, etc... par périodicité.

$J :\quad j_0 = 0 \quad j_1 = 1 \quad j_2 = 0 \quad j_3 = -1$ puis $j_4 = j_0 = 0$, etc...

$K :\quad k_0 = 0 \quad k_1 = 0 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 1$ puis $k_4 = k_0 = 0$, etc...

Question 12.1.) T_1 est l'identité et T_k associe à une suite, une suite extraite, donc $\boxed{T_k \text{ est linéaire de } E \text{ dans } E}$

Question 12.2.) Pour $u = \lambda \in \mathcal{S}$, et $w = T_2(u)$, on a $w_n = \lambda_{2n} = (-1)^n$ qui n'est pas dans $\mathcal{S}$. (question **B.1.1.**)

$\boxed{\mathcal{S} \text{ n'est pas stable par } T_2}$

Question 12.3.) Par contre, si $u \in \mathcal{S}$, et $w = T_3(u)$, on a $w_{n+2} + w_n = u_{3n+6} + u_{3n} = u_{3n+2} + u_{3n}$ par 4-périodicité.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} + w_n = u_{3n+2} + u_{3n} = 2a$ avec la même constante : $\boxed{\text{si } u \in \mathcal{S} \text{ alors } w = T_3(u) \in \mathcal{S}}$

Question 12.4.) Ainsi la restriction t_3 de T_3 à $\mathcal{S}$ est un endomorphisme de S. Toutes nos suites sont 4-périodiques, il suffit donc d'identifier les relations entre les 4 premiers termes :

$$\left.\begin{array}{l} t_3(I) = (1,1,0,0,\dots) = I + J \\ t_3(J) = (0,-1,0,1,\dots) = -J \\ \text{et } t_3(K) = (0,1,1,0,\dots) = J + K \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ représente } t_3 \text{ dans la base } (I,J,K) \text{ de } \mathcal{S}}$$

Question 12.5.) Le polynôme caractéristique de M vaut $P_M(x) = -(1+x)(x-1)^2$ pour tout x réel.

$\boxed{\text{Il est scindé sur } \mathbb{R}}$. De plus le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 correspond à $MX = X$, c'est le $\boxed{\text{plan d'équation } x - 2y + z = 0}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre simple est de dimen--sion 1, avec $MX = -X$, c'est $\boxed{\text{la droite } x = z = 0}$. Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre égale la multiplicité en tant que racine : la condition nécessaire et suffisante du plynôme caractéristique est assurée et $\boxed{t_3 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{S}}$.

Question 12.6.) Dans une base constituée de vecteurs propres, la matrice de t_3 est $D = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ donc $D^2 = I_3$ et $\boxed{t_3 \text{ est une symétrie vectorielle de } \mathcal{S}}$ par rapport à un (hyper)plan.

Question 13.) Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \left(\frac{u_0 - u_2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)x^n + \left(u_1 - \frac{u_0+u_2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)x^n + \frac{u_0+u_2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

D'où $\boxed{h(x) = \left(\dfrac{u_0 - u_2}{2}\right)\dfrac{1}{1+x^2} + \left(u_1 - \dfrac{u_0+u_2}{2}\right)\dfrac{x}{1+x^2} + \left(\dfrac{u_0+u_2}{2}\right)\dfrac{1}{1-x} \text{ sur }]-1,1[}$

avec des sommes totales déjà calculées ou connues.

Si $u_0 + u_2 \neq 0$, on peut prolonger h par continuité en $x = -1$, (mais la série est divergente).

Si $u_0 + u_2 = 0$, on peut prolonger h par continuité en $x = -1$ et en $x = +1$.

Partie C $\quad \mathcal{S}$ de la partie B est donc $\mathcal{S}_2$ avec les notations de cette partie C.

Question 1.) Si $u \in \mathcal{S}_p$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2p} + u_{n+p} = 2a$ et $u_{n+p} + u_n = 2a$ donc $u_{n+2p} = u_n$

et $\boxed{u \in \mathcal{S}_p \text{ est } 2p\text{-périodique}}$

Question 2.1.) Le polynôme caractéristique de F est défini par $P_F(x) = \det(F - xI_{p+1})$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P_F(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & -x & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -x & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-1)^{2p+2}(1-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -x & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

par développement selon la dernière ligne.

On développe ce dernier par rapport à sa première colonne,on a des déterminants de matrices triangulaires.

$$\boxed{P_F(x) = (1-x)\Big[(-x)^p + (-1)^{p+1}(-1)\Big] = (-1)^p(1-x)(x^p+1)}$$

Question 2.2.) Les racines de P_F donnent : $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$, si p est pair et $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(F) = \{1,-1\}$ si p impair.
Les racines de P_F dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(F) = \left\{1, e^{\frac{i\pi}{p}(2k+1)} \text{ où } k \in \{0,\ldots,p-1\}\right\}$, avec les racines $p^{ième}$ de -1.

Question 2.3.) On a $\det(F) = P_F(0) = (-1)^p \neq 0$, donc $\boxed{F \text{ est inversible dans } \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})}$

Question 2.4.) $\boxed{F \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{R}}$, car elle n'a pas assez de valeurs propres. Si f était diagona--lisable, elle serait semblable à une matrice diagonale avec des 1 ou des -1 sur la diagonale, donc $D^2 = I_{p+1}$ et donc $F^2 = I_{p+1}$ **ce qui est exclu**, car $F^2(e_1) = -e_{p-2}$ avec la première colonne et l'avant-dernière.
$\boxed{F \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}}$, car elle y admet $(p+1)$ valeurs propres distinctes, et c'est une condition suffisante de diagonalisabilité, les sous-espaces propres étant alors des droites.

Question 3.) L'application δ est bien définie sur $\mathcal{S}_p$ car $u_0 + u_p = 2a$, et **linéaire** en fonction des $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ donc de u, de $\mathcal{S}_p$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$.
L'application δ est **injective**, car si $\delta(u) = \delta(v)$ alors $\boxed{\forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1,\ \ u_i = v_i}$
Et $a = b$ donc $\boxed{\forall i,\ p \leqslant i \leqslant 2p-1,\ \ u_i = 2a - u_{i-p} = 2b - v_{i-p} = v_i}$
donc les deux suites u et v coïncident pour $0 \leqslant i \leqslant 2p-1$, or elles sont $2p$-périodiques, donc $u = v$.
De plus δ est **surjective**, car si on se donne $\vec{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, a)$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$, on peut définir une suite u de $\mathcal{S}_p$,
avec les formules que l'on vient d'utiliser : $\begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant p-1,\ \ u_i = a_i \\ p \leqslant i \leqslant 2p-1,\ \ u_i = 2a - a_{i-p} \\ u \text{ est } 2p\text{-périodique.} \end{cases}$ telle que $\delta(u) = \vec{a}$.
Puisqu'on a un isomorphisme en dimension **finie**, on a $\boxed{\dim(\mathcal{S}_p) = p+1}$

Question 4.1.) L'application ψ est l'opérateur sur les suites appelé décalage de Bernoulli.
ψ est linéaire de E dans E (clair) et si $u \in S_p$ et $t = \psi(u)$, alors :
$\forall n \in \mathbb{N},\quad t_{n+p} + t_n = u_{n+p+1} + u_{n+1} = 2a$ donc il existe a tel que $t \in S_p$. $\boxed{\text{Donc } \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p)}$

Question 4.2.) u de S_p est $2p$-périodique, et si $t = \psi^{2p}(u)$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad t_n = u_{n+2p} = u_n$ donc $\boxed{\psi^{2p} = I_d}$

Question 4.3.) Soient $(I_1, I_2, \cdots, I_p, I_{p+1})$ les vecteurs de la base C_p, on a $\delta(I_k) = E_k$ de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$.
Donc les p premiers I_k sont des suites de $\mathcal{S}_p$ où $a = 0$ et I_{p+1} est une suite de $\mathcal{S}_p$ où $a = 1$.
Elles sont $2p$-périodiques. Précisons leurs $2p$ premiers termes :

$$\left\{\begin{array}{lcccccccccc} & u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{p-1} & u_p & u_{p+1} & u_{p+2} & \cdots & u_{2p-1} \\ I_1 : & 1, & 0, & 0, & \cdots & 0, & -1, & 0, & 0, & \cdots & 0, \\ I_2 : & 0, & 1, & 0, & \cdots & 0, & 0, & -1, & 0, & \cdots & 0, \\ I_3 : & 0, & 0, & 1, & \cdots & 0, & 0, & 0, & -1, & \cdots & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \cdots & \vdots \\ I_p : & 0, & 0, & \cdots & \cdots & 1, & 0, & 0, & & \cdots & -1, \\ I_{p+1} : & 0, & 0, & \cdots & \cdots & 0, & 2, & 2, & 2, & \cdots & 2, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi(I_1) = -I_p \\ \psi(I_2) = I_1 \\ \psi(I_3) = I_2 \\ \quad\vdots \\ \psi(I_p) = I_{p-1} \\ \psi(I_{p+1}) = 2I_p + I_{p+1} \end{cases}$$

$\boxed{\text{la matrice de } \psi \text{ dans la base } C_p \text{ est donc } F}$

Question 4.4.) $\boxed{\psi \text{ n'est donc pas diagonalisable dans } \mathcal{S}_p}$, puisque F n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Question 4.5.) On a $\det(\psi) = \det(F) = (-1)^p \neq 0$, donc ψ **bijective** et d'ailleurs $\boxed{\psi^{-1} = \psi^{2p-1}}$ avec $\psi^{2p} = I_d$
Ainsi si $t = \psi^{-1}(u)$ on a $t_0 = u_{2p-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad t_n = u_{n-1}$.