Partie I

I.1.a) I_c est un intervalle

Un intervalle J de $\mathbb{R}$ est caractérisé par le fait que pour tout (x, y) dans J^2, pour tout z de $\mathbb{R}$, $(x \leq z \leq y)$ entraine que z appartient à J.
Or pour tout $(x, y) \in I_c^2$, tout $z \in \mathbb{R}$, $(x \leq z \leq y)$ entraine que $(x + c \leq z + c \leq y + c)$.
Or $x + c$ et $y + c$ appartiennent à I, donc $z + c$ appartient à I et z à I_c.

$\hat{f}$ est solution de $(*)$

Pour tout x de I_c,

$$\hat{f}'(x) = f'(x + c)$$

$$\hat{f}''(x) = f''(x + c) = f^2(x + c) = \hat{f}^2(x)$$

Par suite $\hat{f}$ est solution de $(*)$ sur I_c.

I.1.b) $\tilde{f}$ est solution de $(*)$ sur $\tilde{I}$

$\tilde{I}$ est un intervalle et pour tout x de $\tilde{I}$,

$$\tilde{f}'(x) = -f'(-x)$$

$$\tilde{f}''(x) = f''(-x) = f^2(-x) = \tilde{f}^2(x)$$

Par suite $\tilde{f}$ est solution de $(*)$ sur $\tilde{I}$.

I.2.a) Détermination des réels d et γ tels que d/x^γ soit solution de $(*)$ sur $\left]0, +\infty\right[$

Pour tout x de $\left]0, +\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{-\gamma d}{x^{\gamma+1}} \qquad f''(x) = \frac{\gamma(\gamma + 1)d}{x^{\gamma+2}} \qquad f^2(x) = \frac{d^2}{x^{2\gamma}}$$

Donc pour que d/x^γ soit solution de $(*)$ sur $\left]0, +\infty\right[$, il faut et il suffit que $\gamma + 2 = 2\gamma$ et $\gamma(\gamma + 1)d = d^2$. Nous en déduisons que $\gamma = 2$ et $d = 6$.

$$f(x) = \frac{6}{x^2}$$

I.2.b) Solution non nulle de $(*)$ sur $\left]-\infty, 0\right[$

D'après la question I.1.b une solution non nulle de $(*)$ sur $\left]-\infty, 0\right[$ est $\tilde{f}(x) = \dfrac{6}{(-x)^2}$.

$$\tilde{f}(x) = \frac{6}{x^2}$$

I.2.c) Solution non nulle g_b de $(*)$ sur $\left]b, +\infty\right[$

Si $I = \left]0, +\infty\right[$, $I_c = \left]-c, +\infty\right[$ d'où $I_{-b} = \left]b, +\infty\right[$. Une solution non nulle g_b de $(*)$ sur $\left]b, +\infty\right[$ sera donc telle que

$$g_b(x) = \frac{6}{(x-b)^2}$$

La fonction g_b ci-dessus satisfait bien à

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} g_b(x) = +\infty.$$

Solution non nulle f_b de $(*)$ sur $\left]-\infty, b\right[$

Si $I_b = \left]-b, +\infty\right[$, $\tilde{I}_b = \left]-\infty, b\right[$ qui est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $-x$ appartienne à I_b. Une solution non nulle h_b de $(*)$ sur I_b sera donc telle que

$$h_b(x) = \frac{6}{(x+b)^2}$$

et donc une solution non nulle f_b de $(*)$ sur $\left]-\infty, b\right[$ sera donc telle que pour tout x de $\left]-\infty, b\right[$,

$$f_b(x) = \frac{6}{(-x+b)^2}.$$

$$f_b(x) = \frac{6}{(x-b)^2}$$

La fonction f_b ci-dessus satisfait bien à

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f_b(x) = +\infty.$$

I.3.a) f' est croissante sur I

Pour tout x dans I $f''(x) = f^2(x) \geq 0$, donc f' est croissante sur I.

I.3.b) Il existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, $f''(x) \geq \dfrac{f^2(0)}{2}$

f'' est continue sur I donc sur $[0, 1[$, en particulier en 0. Par suite à tout α réel strictement positif on peut associer un β réel strictement positif tel que pour tout x de $[0, 1[$, l'inégalité $0 \leq x \leq \beta$ entraine

$$-\alpha \leq f''(x) - f''(0) \leq \alpha.$$

Choisissant $\alpha = \dfrac{f^2(0)}{2}$, sachant que $f''(0) = f^2(0)$, on aura pour tout x de $[0, \beta] \cap [0, 1[$,

$$\frac{f^2(0)}{2} \leq f''(x) \leq \frac{3f^2(0)}{2}.$$

Ici $\beta < 1$ car on ne considère que la restriction de f à $[0, 1[$, et on peut toujours remplacer β par un réel positif plus petit. On a donc $[0, \beta] \cap [0, 1[= [0, \beta]$ et la proposition est démontrée en prenant $\varepsilon = \beta$. Donc il existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que pour tout $x \in [0, \varepsilon]$,

$$f''(x) \geq \frac{f^2(0)}{2}$$

Pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, $f'(x) > 0$
Pour tout x de $]0, \varepsilon]$, $f''(x) > 0$ et donc f' est strictement croissante sur $[0, \varepsilon]$ et, puisque $f'(0) = 0$, pour tout x de $]0, \varepsilon]$,

$$f'(x) > f'(0) = 0$$

I.3.c) f est strictement croissante sur I

Comme f' est croissante sur I (question I.3.a), pour les valeurs de x supérieures à ε, $f'(x) \geq f'(\varepsilon) > 0$. Donc pour tout $x > 0$ de I, $f'(x) > 0$ et par suite f est strictement croissante sur I.

I.3.d) Pour tout x de I, $f'(x)^2 - \frac{2}{3}\left(f(x)^3 - f(0)^3\right) = 0$.

Pour tout x de I, $f''(x) = f^2(x)$ donc, en multipliant les deux membres par $f'x)$,

$$f'(x)f''(x) = f^2(x)f'(x).$$

En intégrant on obtient qu'il existe une constante réelle C telle que pour x de I,

$$\frac{1}{2}f'(x)^2 = \frac{1}{3}f(x)^3 + C.$$

Si on fait $x = 0$ dans l'égalité précédente, on obtient $0 = \frac{1}{3}f(0)^3 + C$ donc $C = \frac{-1}{3}f(0)^3$. Par suite pour tout x de I,

$$f'(x)^2 - \frac{2}{3}\left(f(x)^3 - f(0)^3\right) = 0.$$

I.3.e) Pour tout x de I,

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}}$$

On tire de l'égalité précédente que

$$f'(x) = +\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{f(x)^3 - f(0)^3}$$

ou

$$f'(x) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{f(x)^3 - f(0)^3}.$$

Mais comme $f'(x) \geq 0$

$$f'(x) = +\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{f(x)^3 - f(0)^3}.$$

On aimerait bien écrire que

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)^3 - f(0)^3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et intégrer entre 0 et x, ce qui donnerait

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)^3 - f(0)^3}}dt = \sqrt{\frac{2}{3}}x$$

puis faire le changement de variable $y = f(x)$ dans le premier membre ce qui donnerait l'égalité demandée.
Autrement dit on aimerait appliquer le théorème suivant :

Théorème
Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant le segment fermé borné $\psi([a, b])$. Soit h une fonction continue $J \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} h(y)\, dy = \int_a^b h(\psi(x))\, \psi'(x)\, dx.$$

Ici, évidemment, on souhaite l'utiliser avec $\psi = f$, $h(y) = \frac{1}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}}$, $a = 0$ et $b = x$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc $\mathcal{C}^1$ sur I, et la fonction $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}}$ est continue en dehors de $f(0)$: Quand y tend vers $f(0)$, le dénominateur tend vers 0 et on a une intégrale généralisée !
f est continue et strictement croissante sur I et admet une fonction réciproque φ définie sur l'intervalle $f(I)$ dont la borne inférieure est $f(0)$. Soient u et x deux éléments de I tels que $0 < u < x$. Alors on peut appliquer le théorème de changement de variable ci-dessus :

$$\int_{f(u)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(x - u).$$

Quand u tend vers 0, $f(u)$ tend vers $f(0)$, et nous devons examiner la convergence de l'intégrale. Alors au voisinage de 0

$$\frac{1}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(y - f(0))(y^2 + f(0)y + f(0)^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{(y - f(0))(3f(0)^2)}}$$

donc l'intégrale converge et donc pour tout x de I,

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}}$$

I.4) Étude de la convergence de l'intégrale impropre

$$J(w) = \int_w^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - w^3}}$$

Au voisinage de $+\infty$,

$$(y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y^3 - w^3}}) \sim (y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y^3}}).$$

Comme $3/2 > 1$, l'intégrale converge en $+\infty$.
Si $w \neq 0$, au voisinage de w,

$$(y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y^3 - w^3}}) \sim (y \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}w\sqrt{y - w}}).$$

Donc $J(w)$ converge en w. Si $w = 0$,

$$J(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^{3/2}}.$$

Comme $3/2 > 1$, $J(0)$ diverge en 0.

Calcul de $J(w)$ pour $w > 0$

Effectuons le changement de variable $y = wt$ dans $J(w)$:

$$J(w) = \int_w^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - w^3}} = \int_1^{+\infty} \frac{wdt}{\sqrt{w^3t^3 - w^3}} = \frac{J(1)}{\sqrt{w}}.$$

(En toute rigueur il aurait fallu faire le changement de variable dans

$$\int_w^A \frac{dy}{\sqrt{y^3 - w^3}}$$

pour $A > w$ puis faire tendre A vers $+\infty$ ...)

Calcul de $J(-w)$ pour $w > 0$

Effectuons le changement de variable $y = wt$ dans $J(-w)$:

$$J(-w) = \int_{-w}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + w^3}} = \int_{-1}^{+\infty} \frac{wdt}{\sqrt{w^3t^3 + w^3}} = \frac{J(-1)}{\sqrt{w}}.$$

Même remarque que ci-dessus.

I.5) Il n'existe pas de fonction f solution de $(*)$ sur $[0, +\infty[$ telle que $f'(0) = 0$ et $f(0) \neq 0$

Supposons qu'il existe une telle fonction f, solution de $(*)$ sur $[0, +\infty[$ telle que $f'(0) = 0$ et $f(0) \neq 0$. Alors soit $f(0) > 0$, soit $f(0) < 0$.

Examinons d'abord le cas où $f(0) > 0$.
Posons $w = f(0)$ dans l'égalité de la question I.3.e :

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}} = \int_1^{f(x)/w} \frac{dt}{\sqrt{w}\sqrt{t^3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{w}} \int_1^{f(x)/w} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}}$$

avec $1 \leq f(x)/w$.
Alors $\int_1^{f(x)/w} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$ étant majorée pour $x \in [0, +\infty[$ par $J(1)$, pour $x \in [0, +\infty[$, $x\sqrt{\frac{2}{3}}$ serait majoré par $J(1)/\sqrt{f(0)}$, ce qui est impossible.

Examinons maintenant le cas où $f(0) < 0$.
Posons $w = -f(0)$ dans l'égalité de la question I.3.e :

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{-w}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + w^3}} = \int_{-1}^{f(x)/w} \frac{dt}{\sqrt{w}\sqrt{t^3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{w}} \int_{-1}^{f(x)/w} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$$

avec $-1 \leq f(x)/w$.
Alors $\int_{-1}^{f(x)/w} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ étant majorée pour $x \in]0, +\infty[$ par $J(-1)$, pour $x \in]0, +\infty[$, $x\sqrt{\frac{2}{3}}$ serait majoré par $J(-1)/\sqrt{-f(0)}$, ce qui est impossible.

Par suite $(*)$ n'admet pas de solution f sur sur $[0, +\infty[$ telle que $f'(0) = 0$ et $f(0) \neq 0$

$\boxed{\text{Partie II}}$

II.1.a) Démonstration de relations diverses

Posons $R_1 = \sum_{j=1}^{k} j$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} R_1 & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (k-1) & + & k \\ R_1 & = & k & + & (k-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

En faisant la somme nous voyons que

$$2R_1 = k(k+1)$$

donc

$$R_1 = \frac{k(k+1)}{2}$$

Posons $R_2 = \sum_{j=1}^{k} j^2$. Pour montrer que $R_2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, nous allons faire une démonstration par récurrence. Soit $\mathcal{P}_k$ la propriété :

$$R_2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

$\mathcal{P}_1$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie.
$\mathcal{P}_{k+1}$ signifie :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right] \\ &= \frac{(k+1)}{6}\left[2k^2 + 7k + 6\right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Donc la propriété est récurrente.

Étudions le signe de $R_3 = 2k(2k-1) - \dfrac{(k+1)^2}{2}$.

$$\begin{aligned} R_3 &= 2k(2k-1) - \frac{(k+1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[4k(2k-1) - (k+1)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[7k^2 - 6k - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}(k-1)(7k+1) \geq 0 \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

Étudions le signe de $R_4 = k^2 + 2k - \dfrac{3}{4}(k+1)^2$.

$$\begin{aligned}
R_4 &= k^2 + 2k - \frac{3}{4}(k+1)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[4(k^2+2k) - 3(k+1)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[k^2+2k-3\right] \\
&= \frac{1}{4}(k-1)(k+3) \geq 0 \text{ pour } k \geq 1
\end{aligned}$$

II.1.b) Calcul de $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j)$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j) &= \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)[(k+1)-(j+1)] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k+1) - \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)^2 \\
&= (k+1)\sum_{j=1}^{k} j - \sum_{j=1}^{k} j^2 \\
&= \frac{k(k+1)^2}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{k(k+1)}{6}(3k+3-2k-1) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{6}
\end{aligned}$$

Vérification l'inegalité

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{(k+1)^3}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j) \leq \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)^3}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j) - \frac{1}{8} &= \frac{k(k+2)}{6(k+1)^2} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{24(k+1)^2}[4k(k+2) - 3(k+1)^2] \\
&= \frac{1}{24(k+1)^2}(k^2+2k-3) \\
&= \frac{(k-1)(k+3)}{24(k+1)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)^3}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j)-\frac{1}{6} &= \frac{k(k+2)}{6(k+1)^2}-\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{6(k+1)^2}[k(k+2)-(k+1)^2]\\ &= \frac{-1}{6(k+1)^2}\leq 0\end{aligned}$$

II.2) Conditions sur les coefficients a_k

Pour $x\in]-R,R[$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{2k}$$

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}2(k+1)a_{k+1}x^{2k+1}$$

$$f''(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}2(k+1)(2k+1)a_{k+1}x^{2k}$$

$$f^2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a_j\right)x^{2k}$$

f est solution de $(*)$ sur $]-R,R[$ si et seulement si pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a_j=2(k+1)(2k+1)a_{k+1}$$

c'est-à-dire pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=0}^{k-1}a_{k-1-j}a_j=2k(2k-1)a_k.$$

Donc pour tout $k\geq 1$,

$$a_k=\frac{1}{2k(2k-1)}\sum_{j=0}^{k-1}a_{k-1-j}a_j$$

II.3.a) $c_k>0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$

Nous allons faire une démonstration par récurrence. Désignons par $\mathcal{Q}_k$ la propriété

$$(\forall i\in[0,k],\ c_i>0)$$

$c_1=1$ donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.
Pour $k\geq 1$ supposons que $\mathcal{Q}_{k-1}$ est vraie. Alors pour tout $j\in[0,k-1]$, $c_j>0$. Donc pour tout $j\in[0,k-1]$, $k-1-j\in[0,k-1]$ et $c_jc_{k-1-j}>0$.

Alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} > 0$ et $c_k = \dfrac{1}{2k(2k-1)} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j} c_j > 0$ donc $\mathcal{Q}_k$ est vraie : la propriété $\mathcal{Q}_k$ est récurrente.

II.3.b) Démonstration de l'inégalité

$$\frac{1}{4(k+1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq c_k \leq \frac{2}{(k+1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j}$$

D'après la question II.1.a, $2k(2k-1) \geq \dfrac{(k+1)^2}{2}$ d'où $\dfrac{1}{2k(2k-1)} \leq \dfrac{2}{(k+1)^2}$, donc

$$c_k = \frac{1}{2k(2k-1)} \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j} c_j \leq \frac{2}{(k+1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j} c_j$$

D'autre part

$$\frac{1}{4(k+1)^2} - \frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{4k(k+1)^2(2k-1)}[(2k^2-k)-(2k^2+4k+2)] = \frac{-5k-2}{4k(k+1)^2(2k-1)} \leq 0$$

donc pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{4(k+1)^2} \leq \frac{1}{2k(2k-1)}$$

et

$$c_k = \frac{1}{2k(2k-1)} \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j} c_j \geq \frac{1}{4(k+1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j} c_j$$

II.4.a) Démonstration de l'inégalité

$$\frac{k+1}{32^k} \leq c_k \leq \frac{k+1}{3^k}$$

Nous allons, comme il est suggéré, faire une démonstration par récurrence. Soit $\mathcal{R}_k$ la proposition

$$\left(\forall i \in [0,k],\ \frac{i+1}{32^i} \leq c_i \leq \frac{i+1}{3^i}\right).$$

$\mathcal{R}_0$ est vraie.
Pour $k \geq 1$, supposons que $\mathcal{R}_{k-1}$ est vraie. Alors pour tout $j \in [0, k-1]$,

$$\frac{j+1}{32^j} \frac{k-j}{32^{k-1-j}} \leq c_j c_{k-1-j} \leq \frac{j+1}{3^j} \frac{k-j}{3^{k-1-j}}$$

$$\frac{(j+1)(k-j)}{32^{k-1}} \leq c_j c_{k-1-j} \leq \frac{(j+1)(k-j)}{3^{k-1}}$$

$$\frac{1}{32^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)(k-j) \leq \sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq \frac{1}{3^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)(k-j)$$

et en vertu de la question II.1.b

$$\frac{(k+1)^3}{8\times 32^{k-1}} \leq \sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq \frac{(k+1)^3}{6\times 3^{k-1}}.$$

Alors d'après la question II.3.b

$$\frac{1}{4(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq c_k \leq \frac{2}{(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j}$$

donc

$$\frac{1}{4(k+1)^2}\frac{(k+1)^3}{8\times 32^{k-1}} \leq \frac{1}{4(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq c_k \leq \frac{2}{(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq \frac{2}{(k+1)^2}\frac{(k+1)^3}{6\times 3^{k-1}}$$

donc

$$\frac{k+1}{32^k} \leq c_k \leq \frac{k+1}{3^k}$$

La propriété $\mathcal{R}_k$ est vraie, $\mathcal{R}_k$ est récurrente.

II.4.b) Rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$

Posons $u_k = \frac{k+1}{32^k}$ et $v_k = \frac{k+1}{3^k}$.

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{32} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{1}{3}$$

Donc la série $\sum_{k\geq 0} u_k x^{2k}$ a pour rayon de convergence $\sqrt{32}$ et la série $\sum_{k\geq 0} v_k x^{2k}$ a pour rayon de convergence $\sqrt{3}$. Pour $0 \leq |x| < \sqrt{3}$, la série $\sum_{k\geq 0} v_k x^{2k}$ converge absolument et donc la série $\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ aussi, donc $\rho \geq \sqrt{3}$. Pour $|x| > \sqrt{32}$, la série $\sum_{k\geq 0} u_k x^{2k}$ ne converge pas absolument et donc la série $\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ non plus, donc $\rho \leq \sqrt{32}$.
Finalement on voit que $\sqrt{3} \leq \rho \leq 4\sqrt{2}$.

II.5.a) Démonstration de l'égalité

$$R(z) = \frac{\rho}{\sqrt{|z|}}$$

La (une) définition de ρ est que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \rho$ la série $\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ est absolument convergente et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \rho$ la série $\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ est non absolument convergente.

La (une) définition de $R(z)$ est que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R(z)$ la série $\sum_{k\geq 0} c_k z^{k+1} x^{2k}$ est absolument convergente et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R(z)$ la série $\sum_{k\geq 0} c_k z^{k+1} x^{2k}$ est non absolument convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \dfrac{\rho}{\sqrt{|z|}}$. Posons $\rho' = |x|\sqrt{|z|}$. Alors $|c_k z^{k+1} x^{2k}| = c_k |z| \rho'^{2k} < c_k |z| \rho^{2k}$. Comme $\rho' < \rho$ la série $\sum_{k\geq 0} c_k z^{k+1} x^{2k}$ est absolument convergente. Donc

$$R(z) \geq \frac{\rho}{\sqrt{|z|}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \dfrac{\rho}{\sqrt{|z|}}$. Posons $\rho' = |x|\sqrt{|z|}$. Alors $|c_k z^{k+1} x^{2k}| = c_k |z| \rho'^{2k} > c_k |z| \rho^{2k}$. Comme $\rho' > \rho$ la série $\sum_{k\geq 0} c_k z^{k+1} x^{2k}$ est non absolument convergente. Donc

$$R(z) \leq \frac{\rho}{\sqrt{|z|}}.$$

Donc

$$R(z) = \frac{\rho}{\sqrt{|z|}}.$$

Donc $R(z_0) = 1$ pour z_0 strictement positif si et seulement si $z_0 = \rho^2$.

II.5.b) La fonction réelle h_z est solution de $(*)$ sur $]-R(z), R(z)[$

Pour tout $x \in]-R(z), R(z)[$,

$$h_z(x) = \sum_{k\geq 0} c_k z^{k+1} x^{2k}$$

$$h'_z(x) = \sum_{k\geq 0} (2k+2) c_{k+1} z^{k+2} x^{2k+1}$$

$$h''_z(x) = \sum_{k\geq 0} (2k+2)(2k+1) c_{k+1} z^{k+2} x^{2k}$$

Or

$$\begin{aligned}
(h_z(x))^2 &= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} c_j z^{j+1} c_{k-j} z^{k-j+1} \right) x^{2k} \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j} \right) z^{k+2} x^{2k} \\
&= \sum_{k\geq 0} (2k+2)(2k+1) c_{k+1} z^{k+2} x^{2k} = h''_z(x)
\end{aligned}$$

Donc h_z est solution de $(*)$ sur $]-R(z), R(z)[$.

Partie III

III.1) Démonstration de l'égalité $u(0) = -v(0)$

$u(0) = C_0(z_0) = c_0 z_0 = z_0$.
$v(0) = -C_0(z_0) = -c_0 z_0 = -z_0$.

Démonstration de l'égalité $u'(0) = v'(0) = 0$

u' et v' étant des séries ne contenant que les puissances impaires de x, on a $u'(0) = v'(0) = 0$.

Démonstration de l'égalité

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{z_0}^{u(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - (z_0)^3}} = \int_{-z_0}^{v(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + (z_0)^3}}$$

On prend la formule démontrée en I.3.e,

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}}$$

on remplace f par u puis par v, ce qui possible puisque u et v sont solutions de $(*)$ sur $]-1, 1[$, et on utilise que $u(0) = z_0$ puis $v(0) = -z_0$:

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{z_0}^{u(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - (z_0)^3}} = \int_{-z_0}^{v(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + (z_0)^3}}$$

III.2) Démonstration de l'égalité $J(z_0)^2 = 2/3$ **et valeur de** z_0 **en fonction de** $J(1)$

$$\lim_{x\to 1} x\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \int_{z_0}^{u(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - (z_0)^3}} = \int_{z_0}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - (z_0)^3}} = J(z_0)$$

donc

$$J(z_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad J(z_0)^2 = \frac{2}{3}$$

Or on a vu dans la question I.4 que

$$[J(z_0)]^2 = \frac{[J(1)]^2}{z_0} \quad \text{donc} \quad \frac{[J(1)]^2}{z_0} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad z_0 = \frac{3}{2}[J(1)]^2$$

III.3) Démonstration de l'inégalité $J(1) < J(-1)$

Faisons le changement de variable $y = 2 + t$ dans l'intégrale

$$J(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}}.$$

$$J(1)=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+6t^2+12t+7}}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1+6(t+1)^2}}<\int_{-1}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}=J(-1)$$

(Car la fonction

$$t\mapsto\left(\frac{1}{\sqrt{t^3+1+6(t+1)^2}}-\frac{1}{\sqrt{t^3+1}}\right)$$

est strictement négative et continue sur $]-1,+\infty[$)
(En toute rigueur il aurait fallu faire le changement de variable dans

$$\int_1^A\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}$$

avec $A>-1$ puis faire tendre A vers $+\infty$ ...)

Il existe un unique réel $\lambda>-1$ tel que

$$J(1)=\int_{-1}^{\lambda}\frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$$

Soit

$$\begin{array}{rcl}\varphi & : &]-1,+\infty[\ \to\ \mathbb{R}\\ & & u\ \mapsto\ \displaystyle\int_{-1}^{u}\frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}\end{array}$$

φ est continue et croissante sur $]-1,+\infty[$.
$\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u)=J(-1)$ et $\lim\limits_{u\to-1}\varphi(u)=0$.
$J(1)$ appartient à l'intervalle $]0,J(-1)[$, qui est $\varphi(]-1,+\infty[)$, donc il existe un unique réel λ de $]-1,+\infty[$ tel que $\varphi(\lambda)=J(1)$ c'est-à-dire tel que

$$J(1)=\int_{-1}^{\lambda}\frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$$

III.4) Existence et calcul de la limite à gauche

$$L=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}v(x)$$

Faisons le changement de variable $y=z_0t$ dans l'intégrale trouvée dans la question III.1 :

$$x\sqrt{\frac{2}{3}}=\int_{-z_0}^{v(x)}\frac{dy}{\sqrt{y^3+(z_0)^3}}=\int_{z_0}^{u(x)}\frac{dy}{\sqrt{y^3-(z_0)^3}}$$

$$x\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{z_0}}\int_{-1}^{v(x)/z_0}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}=\int_{z_0}^{u(x)}\frac{dy}{\sqrt{y^3-(z_0)^3}}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}x\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\quad\text{et}\quad\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\int_{z_0}^{u(x)}\frac{dy}{\sqrt{y^3-(z_0)^3}}=\int_{z_0}^{+\infty}\frac{dy}{\sqrt{y^3-(z_0)^3}}=J(z_0)=\frac{J(1)}{\sqrt{z_0}}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_{-1}^{v(x)/z_0} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}} = J(1) = \int_{-1}^{\lambda} \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{v(x)}{z_0} = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} v(x) = L = \lambda z_0 = \frac{3}{2}\lambda[J(1)]^2$$

Finalement

$$L = \frac{3}{2}\lambda[J(1)]^2$$