# Partie I

### I.1) Coefficient de plus haut degré de $T_n$ et degré de $T_n$

$T_0$ appartient à $E_0$, $T_1$ appartient à $E_1$, donc d'après la formule de récurrence, $T_n$ appartient à $E_n$.
Pour tout entier positif $n$ désignons par $\mathcal{P}_n$ la propriété
«Pour tout $k \leq n$, $T_k$ a pour coefficient de plus haut degré $2^{k-1}$».
$\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est récurrente à partir de 1 donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

**Parité de $T_n$**

Pour tout entier positif $n$ désignons par $\mathcal{Q}_n$ la propriété
«Pour tout $k \leq n$, tous les termes de $T_k$ ont la parité de $k$».
$\mathcal{Q}_1$ est vraie et $\mathcal{Q}_n$ est récurrente à partir de 1 donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

### I.2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $\theta$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

Pour tout entier positif $n$ désignons par $\mathcal{R}_n$ la propriété
«Pour tout $k \leq n$, et tout réel $\theta$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$»
$\mathcal{R}_1$ est vraie.
Pour $n \geq 2$, supposons que $\mathcal{R}_{n-1}$ est vraie. Alors :

$$T_{n-1}(\cos\theta) = \cos(n-1)\theta \quad \text{et} \quad T_{n-2}(\cos\theta) = \cos(n-2)\theta$$

$$T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \big[\cos(n\theta) + \cos(n-2)\theta\big] - \cos(n-2)\theta = \cos n\theta$$

et $\mathcal{R}_n$ est vraie.
$\mathcal{R}_n$ est donc récurrente à partir de 1 donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

### I.3) Valeurs particulières de $T_n$

$T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n0) = 1$
$T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$
$T_n(0) = T_n(\cos(\frac{\pi}{2})) = \cos(\frac{n\pi}{2})$
Si $n \equiv 0$ [4] alors $T_n(0) = 1$.
Si $n \equiv 1$ [4] ou $n \equiv 3$ [4] alors $T_n(0) = 0$.
Si $n \equiv 2$ [4] alors $T_n(0) = -1$.

**Zéros de $T_n$**

Cherchons les zéros de $T_n$ appartenant à $\big[-1, 1\big]$. Ils sont de la forme $\cos\theta$ avec $T_n(\cos\theta) = 0$. Donc $\cos n\theta = 0$, donc $n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou encore :

$$\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

En donnant à $k$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient $n$ valeurs de $\theta$ appartenant à $\big]0, \pi\big[$, deux à deux distinctes et dont les cosinus, deux à deux distincts, sont les zéros de $T_n$.
$T_n$, étant un polynôme de degré $n$, a au plus $n$ zéros et nous avons $n$ zéros de ce polynôme. Donc les zéros de ce polynôme sont les nombres :

$$\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) \quad \text{avec} \quad k \in \big\{0, 1, \ldots, n-1\big\}$$

**Extremums de $T_n$**

Cherchons les zéros de $T_n'$ appartenant à $\big[-1, 1\big]$. Pour cela on considère la fonction $\varphi$ telle que :

$$\varphi(\theta) = T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

$$\varphi'(\theta) = -(\sin\theta)\ T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$$

$\sin(n\theta)$ s'annule sans que $\sin(\theta)$ s'annule pour :

$$\theta = \frac{k\pi}{n} \quad \text{avec} \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

et donc, pour ces valeurs de $\theta$, $T_n'(\cos\theta) = 0$.
Les $\cos(\dfrac{k\pi}{n})$ sont des réels deux à deux distincts et au nombre de $n-1$. Comme $T_n'$ est un polynôme de degré $n-1$, il admet au plus $n-1$ zéros réels que nous avons donc obtenus.
Finalement nous voyons que les extremums locaux de $T_n$ sont :

$$T_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = \cos(k\pi) = (-1)^k \quad \text{avec} \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

# Partie II

### II.1) Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)\varphi(x)dx$.

Au voisinage de 1, $w(x)\varphi(x)$ est équivalent à :

$$\frac{\varphi(1)}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

donc l'intégrale converge en 1.
Au voisinage de $-1$, $w(x)\varphi(x)$ est équivalent à :

$$\frac{\varphi(-1)}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

donc l'intégrale converge en $-1$.
L'intégrale est donc convergente, car la fonction $w\varphi$ est continue sur $]-1, 1[$.

### II.2) $E$ muni du produit $<\ ,\ >$ est un espace vectoriel préhilbertien.

L'application $s$ de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ qui au couple $(P, Q)$ associe $< P, Q >$ possède les propriétés suivantes :
a) Pour tout $(\lambda, P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R} \times E^3$ :

$$s(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda s(P_1, Q) + s(P_2, Q)$$

($s$ est linéaire par rapport à la première composante)
b) Pour tout $(P, Q) \in E^2$ :

$$s(P, Q) = s(Q, P)$$

($s$ est symétrique)
c) Pour tout $P \in E$ :

$$s(P, P) \geq 0$$

car

$$s(P, P) = \int_{-1}^{1} w(x)P^2(x)dx \ \text{ et pour tout } x \in [-1, 1], \quad w(x)P^2(x) \geq 0$$

Donc $s$ est positive.

d) Soit $\psi$ une fonction numérique de variable réelle, définie et continue sur $\big[a,b\big]$, $(a<b)$, telle que pour tout $x\in\big[a,b\big]$, $\psi(x)\geq 0$, différente de la fonction nulle : il existe $x\in\big[a,b\big]$ tel que $\psi(x)\neq 0$. Soit alors $\Psi$ définie par :

$$\Psi(t)=\int_a^t \psi(u)du \quad \text{avec} \quad t\in\big[a,b\big]$$

$\Psi(a)=0$ et pour tout $t\in\big[a,b\big]$, $\Psi'(t)=\psi(t)\geq 0$, donc $\Psi$ est croissante dans $\big[a,b\big]$. Si $\int_a^b \psi(u)du=\Psi(b)$ était nulle, la fonction $\Psi$ serait constante sur $\big[a,b\big]$ et donc pour tout $x\in\big[a,b\big]$ on aurait $\Psi'(x)=0$ contairement à l'hypothèse. Donc

$$\int_a^b \psi(u)du>0$$

Si $P$ est un polynôme non nul, $wP^2$ est une fonction qui satisfait aux hypothèses précédentes sur tout intervalle fermé borné inclus dans $\big]-1,1\big[$.
Donc $s$ est définie.

Finalement on voit que $s$ donne à $E$ une structure d'espace vectoriel préhilbertien.

**II.3) Calcul de $<T_i\ ,T_j>$.**

Pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ avec $i\neq j$ :

$$<T_i\ ,T_j>=\int_{-1}^{1} w(x)T_i(x)T_j(x)\,dx.$$

Posons $x=\cos\theta$, $dx=-\sin\theta\ d\theta$, $dx=-\sqrt{1-x^2}\ d\theta$ car $\sin\theta\geq 0$ :

$$<T_i\ ,T_j>=-\int_\pi^0 \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta=\int_0^\pi \frac{1}{2}\big[\cos(i+j)\theta+\cos(i-j)\theta\big]\ d\theta$$

$$<T_i\ ,T_j>=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{i+j}\sin(i+j)\theta+\frac{1}{i-j}\sin(i-j)\theta\Big]_0^\pi=0$$

Pour $i\neq 0$,

$$<T_i\ ,T_i>=\int_{-1}^{1} w(x)T_i^2(x)\,dx=-\int_\pi^0 \cos^2(i\theta)\,d\theta=\int_0^\pi\Big[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2i\theta)\Big]\,d\theta=\frac{\pi}{2}$$

Enfin :

$$<T_0\ ,T_0>=\int_{-1}^{1} w(x)T_0^2(x)\,dx=\Big[\mathrm{Arcsin}(x)\Big]_{-1}^{+1}=\pi$$

Donc la famille $\{T_0,T_1,\ldots,T_n\}$ est une famille orthogonale de l'espace préhilbertien $(E,s)$. Donc, en particulier, la famille $\{T_0,T_1,\ldots,T_n\}$ est libre.

**II.4.a) $\big(Q_i\big)_{0\leq i\leq n-1}$ est une base de $E_{n-1}$.**

$\big(Q_i\big)_{0\leq i\leq n-1}$ est une famille de polynômes non nuls et deux à deux orthogonaux de $E$. C'est donc une famille libre de $E$. C'est aussi une famille libre de $n$ vecteurs de $E_{n-1}$, qui est de dimension $n$. C'est donc une base de $E_{n-1}$.

$Q_n$ est orthogonal à tous les $Q_i$ pour $0\leq i\leq n-1$, donc $Q_n$ est orthogonal à chaque vecteur de $\mathrm{Comb}\Big(\big(Q_i\big)_{0\leq i\leq n-1}\Big)$, donc à chaque vecteur de $E_{n-1}$.

**II.4.b) Il existe une suite de réels $\big(\alpha_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Q_n=\alpha_nT_n$**

Désignons par $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour chaque $n\in\mathbb{N}$ par :
«Pour tout entier naturel $k\leq n$, il existe un réel $\alpha_k$ non nul tel que $Q_k=\alpha_kT_k$».

$\mathcal{P}_0$ est vraie car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(x) = 1$ et $Q_0$ est un polynôme de degré 0 : il existe donc $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_0(x) = \alpha_0$, d'où $Q_0 = \alpha_0 T_0$.
On suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.
La famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ forme une base de $E_n$ et la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n-1}$ forme une base de $E_{n-1}$. $Q_n$ appartient à $E_n$ donc il existe $n+1$ réels $\lambda_k$, $0 \leq k \leq n$ tels que :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_k$$

Or pour tout $k$, $0 \leq k \leq n-1$, $< Q_n, T_k >= 0$. Donc :

$$\sum_{i=0}^{n} < \lambda_i T_i, T_k >= 0$$

Pour $i \neq k$, $< T_i, T_k >= 0$ et donc $< \lambda_i T_i, T_k >= 0$. Donc $\lambda_k < T_k, T_k >= 0$. Comme $< T_k, T_k >= s(T_k, T_k) \neq 0$, $\lambda_k = 0$ et :

$$Q_n = \lambda_n T_n$$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

**II.5) Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x)$**

Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(\theta) = f(\cos\theta)$. La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc $g$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus $g$ est périodique de période $2\pi$ et est paire.
La série de Fourier relative à $g$ ne contient que des termes en cosinus et elle converge vers $g$. Donc il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(\cos\theta)$$

c'est-à-dire :

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(\cos\theta)$$

donc pour $x \in \big[-1, 1\big]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x).$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} w(x)f(x)\,dx$$

en remarquant que $g$ est paire et en effectuant le changement de variable $x = \mathrm{Arccos}(\theta)$. De même pour $n \geq 1$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} w(x)f(x)T_n(x)\,dx.$$

# Partie III

**III.1) L'application $u_n : P \mapsto u_n(P)$ est un endomorphisme de $E_n$.**

Pour tout $P \in E_n$, $P' \in E_{n-1}$, $P'' \in E_{n-2}$, donc le polynôme $x \mapsto (1-x^2)P''(x) - xP'(x)$ appartient à $E_n$, c'est-à-dire $u_n(P)$ appartient à $E_n$.
Pour tout $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times E_n \times E_n$,

$$(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' \quad \text{et} \quad (\lambda P + Q)'' = \lambda P'' + Q''$$

d'où

$$u_n(\lambda P + Q) = (1-x^2)\ (\lambda P + Q)''(x) - x\ (\lambda P + Q)'(x)$$

$$u_n(\lambda P + Q) = \lambda\Big[(1-x^2)\ P''(x) - x\ P'(x)\Big] + \Big[(1-x^2)\ Q''(x) - x\ Q'(x)\Big]$$

$$u_n(\lambda P + Q) = \lambda u_n(P) + u_n(Q)$$

$u_n$ est donc linéaire.

### III.2) Matrice de $u_n$ dans la base canonique.

Désignons par $\mathbf{0}$ la fonction de $E_n$ qui à tout $x$ associe 0, par $\mathbf{1}$ celle qui à tout $x$ associe 1 et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, par $X_i$ celle qui à tout $x$ associe $x^i$.
$u_n(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$.
$u_n(X_1) = -X_1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n$, $u_n(X_k) = -n^2 X_k + n(n-1)X_{k-1}$.
La matrice de $u_n$ dans la base canonique de $E_n$ est donc :

$$A_n = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 3.2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2^2 & 0 & 4.3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3^2 & 0 & 5.4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & \dots & & & \dots \\
\dots & & & & & & \dots & & & \dots \\
\dots & & & & & & \dots & & & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-2)^2 & 0 & n(n-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1)^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -n^2
\end{pmatrix}$$

### Valeurs propres de $u_n$.

Le polynôme caractéristique de $A_n$ est, si $I_n$ est la matrice carrée unité d'ordre $n$, $\det(A_n - \lambda In)$ :

$$\begin{vmatrix}
-\lambda & 0 & 2.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1-\lambda & 0 & 3.2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2^2-\lambda & 0 & 4.3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3^2-\lambda & 0 & 5.4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & & & & \dots & & & \dots \\
\dots & & & & & & \dots & & & \dots \\
\dots & & & & & & \dots & & & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-2)^2-\lambda & 0 & n(n-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1)^2-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -n^2-\lambda
\end{vmatrix}$$

Les valeurs propres sont donc : $0$, $-1^2$, $-2^2$, $\dots$, $-n^2$.

### III.3) Sous espaces propres de $u_n$

$u_n$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux. On en déduit que chaque sous espace vectoriel propre est une droite vectorielle.

Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 1. En posant $g(\theta) = T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$, nous obtenons :

$$g'(\theta) = T_k'(\cos\theta) \times (-\sin\theta) = -k\sin(k\theta)$$

$$g''(\theta) = T_k''(\cos\theta) \times (\sin^2\theta) - \cos\theta \times T_k'(\cos\theta) = -k^2\cos(k\theta) = -k^2 T_k(\cos\theta)$$

Pour $x \in \left]-1, 1\right[$ nous avons donc en posant $x = \cos\theta$ :

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) = -k^2 T_k(x)$$

Cette égalité entre polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs de $x$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Un polynôme de degré $k$ a au plus $k$ zéros réels).
Donc $T_k$ est un vecteur propre de $u_n$ de valeur propre $-k^2$ $(k \geq 1)$.
D'autre part $T_0 = \mathbf{1}$ est un vecteur propre de valeur propre 0.

Donc les sous espaces propres respectivement associés à 0, $-1^2$, $-2^2$, ..., $-n^2$ sont les droites vectorielles $\mathrm{Comb}(T_0)$, $\mathrm{Comb}(T_1)$, $\mathrm{Comb}(T_2)$, ..., $\mathrm{Comb}(T_n)$.

**III.4) $u_n$ est un endomorphisme symétrique de $E_n$.**

Soient deux polynômes $P$ et $Q$ de $E_n$. Il existe deux suites de réels $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{0\leq i\leq n}$ telles que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=0}^{n} b_i T_i$$

Comme $u_n(P) = -\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 a_i T_i$,

$$< u_n(P), Q >=< -\sum_{i=0}^{n} i^2 a_i T_i \ , \ \sum_{j=0}^{n} b_j T_j >$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire et l'orthogonalité de la base des $T_i$, on obtient :

$$< u_n(P), Q >= -\sum_{k=0}^{n} k^2 a_k b_k < T_k \ , \ T_k >=< P \ , \ u_n(Q) >$$

à cause de la symétrie du produit scalaire.

Donc $u_n$ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini dans la partie II.
.

## Partie IV

**IV.1) Il existe un polynôme $P_n$ tel que $f_n^{(n)}(x) = w(x)P_n(x)$.**

Posons $g_n(x) = (1+x)^{n-1/2}$ et $h_n(x) = (1-x)^{n-1/2}$, définies sur $\left]-1, 1\right[$. Définissons $g_n^{(0)} = g_n$, $h_n^{(0)} = h_n$ et pour $1 \leq k \leq n$, désignons par $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$ les dérivées d'ordre $k$ de $g_n$ et $h_n$ respectivement.

$$g_n'(x) = g_n^{(1)}(x) = (n - \frac{1}{2})(1+x)^{n-3/2}$$

$$g_n''(x) = g_n^{(2)}(x) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})(1+x)^{n-5/2}$$

$$g_n^{(k)}(x) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})\dots(n - k + \frac{1}{2})(1+x)^{n-k-1/2}$$

$$g_n^{(n)}(x) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2})(1+x)^{-1/2}$$

d'où :

$$g_n^{(n-k)}(x) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(k+\frac{1}{2})(1+x)^{k-1/2}$$

De même :

$$h_n'(x) = h_n^{(1)}(x) = -(n-\frac{1}{2})(1-x)^{n-3/2}$$

$$h_n''(x) = h_n^{(2)}(x) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(1-x)^{n-5/2}$$

$$h_n^{(k)}(x) = (-1)^k(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(n-k+\frac{1}{2})(1-x)^{n-k-1/2}$$

$$h_n^{(n)}(x) = (-1)^n(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2})(1-x)^{-1/2}$$

Appliquons la formule de Leibniz :

$$f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g_n^{(n-k)}(x)h_n^{(k)}(x)$$

$$f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(k+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(n-k+\frac{1}{2})(1+x)^{k-1/2}(1-x)^{n-k-1/2}$$

$$f_n^{(n)}(x) = w(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(k+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(n-k+\frac{1}{2})(1+x)^{k}(1-x)^{n-k}$$

Ce qui est de la forme $w(x)P_n(x)$ où $P_n$ appartient à $E_n$. Le coefficient de $x^n$ dans $P_n$ est :

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(k+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(n-k+\frac{1}{2})$$

C'est le produit par $(-1)^n$ d'une somme de termes strictement positifs, donc le degré de $P_n$ est $n$.

**IV.2) Détermination des fonctions rationnelles $R$ et $S$.**

$$w(x) = (1-x^2)^{-1/2} \qquad w'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\times(-2x) = \frac{x}{1-x^2}w(x)$$

d'où :

$$R(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

$$w'(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$$

$$w''(x) = (1-x^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}(-2x)(1-x^2)^{-5/2}x = w(x)\left[(1-x^2)^{-1} + 3x^2(1-x^2)^{-2}\right] = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2}w(x)$$

$$S(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2}$$

**IV.3) Démonstration de $(1-x^2)f_n'(x) + (2n-1)xf_n(x) = 0$**

$$f_n'(x) = -2x(1-x^2)^{n-3/2}\times(n-\frac{1}{2}) = -(2n-1)x(1-x^2)^{n-3/2}$$

$$(1-x^2)f_n'(x) + (2n-1)xf_n(x) = -(2n-1)x(1-x^2)^{n-1/2} + (2n-1)x(1-x^2)^{n-1/2} = 0$$

**Démonstration de** $(1-x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 3xf_n^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f_n^{(n)}(x) = 0$

En dérivant $n+1$ fois les deux membres et en appliquant la formule de Leibnitz, on obtient :

$$\Big[(1-x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 2x(n+1)f_n^{(n+1)}(x) - 2\frac{(n+1)n}{2}f_n^{(n)}(x)\Big] + (2n-1)\Big[xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x)\Big] = 0$$

soit :

$$(1-x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 3xf_n^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f_n^{(n)}(x) = 0$$

**IV.4) $P_n$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $u_n$.**

$$f_n^{(n)}(x) = w(x)P_n(x)$$

donc :

$$f_n^{(n+1)}(x) = w'(x)P_n(x) + w(x)P_n'(x) = w(x)\Big[\frac{x}{1-x^2}P_n(x) + P_n'(x)\Big]$$

$$f_n^{(n+2)}(x) = w''(x)P_n(x) + 2w'(x)P_n'(x) + w(x)P_n''(x) = w(x)\Big[\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2}P_n(x) + \frac{2x}{1-x^2}P_n'(x) + P_n''(x)\Big]$$

En remplaçant dans

$$(1-x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 3xf_n^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f_n^{(n)}(x) = 0$$

et en simplifiant par $w(x)$, on obtient :

$$\Big[\frac{1+2x^2}{1-x^2}P_n(x) + 2xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x)\Big] - \Big[\frac{3x^2}{1-x^2}P_n(x) + 3xP_n'(x)\Big] + (n^2-1)P_n(x) = 0$$

soit :

$$n^2P_n(x) - xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x) = 0.$$

Donc :

$$u_n(P_n)(x) = -n^2P_n(x).$$

Donc $P_n$ est un vecteur propre de $u_n$ de valeur propre $-n^2$. $P_n$ appartient à la droite vectorielle $\text{Comb}(T_n)$ et donc $(T_n, P_n)$ forme une famille liée.

# Partie V

**V.1.a) $\varphi_p$ est continue.**

Pour $\theta \neq \alpha$,

$$\varphi_p(\theta) = \frac{\cos(p\theta)-\cos(p\alpha)}{\cos\theta - \cos\alpha} = \frac{\cos(p\theta)-\cos(p\alpha)}{\theta-\alpha} \times \frac{\theta-\alpha}{\cos\theta-\cos\alpha}$$

$$\lim_{\substack{\theta\to\alpha\\ \theta\neq\alpha}} \frac{\cos(p\theta)-\cos(p\alpha)}{\theta-\alpha} = p\cos'(p\alpha) = -p\sin(p\alpha)$$

$$\lim_{\substack{\theta\to\alpha\\ \theta\neq\alpha}} \frac{\cos\theta-\cos\alpha}{\theta-\alpha} = \cos'\alpha = -\sin\alpha$$

Donc :

$$\lim_{\substack{\theta\to\alpha\\ \theta\neq\alpha}} \varphi_p(\theta) = p\frac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha} = \varphi_p(\alpha)$$

Donc $\varphi_p$ est continue en $\alpha$.

$\varphi_p$ est continue sur $\big[0,\alpha\big[\cup\big]\alpha,\pi\big]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

**V.1.b) Calcul de $\int_0^\pi \varphi_1(\theta)\,d\theta$ et $\int_0^\pi \varphi_2(\theta)\,d\theta$ .**

Pour tout $\theta\in\big[0,\pi\big]$, $\varphi_1(\theta)=1$, donc :

$$\int_0^\pi \varphi_1(\theta)\,d\theta=\pi=\pi\varphi_1(\alpha)$$

Pour tout $\theta\in\big[0,\pi\big]$, $\varphi_2(\theta)=2\big(\cos(\theta)+\cos(\alpha)\big)$ et en particulier $\varphi_2(\alpha)=4\cos\alpha$.

$$\int_0^\pi \varphi_2(\theta)\,d\theta=2\int_0^\pi\big(\cos(\theta)+\cos(\alpha)\big)\,d\theta=2\Big[\sin\theta+\theta\cos\alpha\Big]_0^\pi=2\pi\cos\alpha=\frac{\pi}{2}\varphi_2(\alpha)$$

**V.1.c) Démonstration de la relation $\varphi_p(\theta)=2\cos(\alpha)\varphi_{p-1}(\theta)-\varphi_{p-2}(\theta)+2\cos((p-1)\theta)$**

Pour $\theta\neq\alpha$, $2\cos(\alpha)\varphi_{p-1}(\theta)-\varphi_{p-2}(\theta)+2\cos((p-1)\theta)$ vaut :

$$\frac{N}{\cos\theta-\cos\alpha}$$

où $N$ vaut :
$2\cos\alpha\cos((p-1)\theta)-2\cos\alpha\cos((p-1)\alpha)-\cos((p-2)\theta)+\cos((p-2)\alpha)+\cdots$
$2\cos\theta\cos((p-1)\theta)-2\cos\alpha\cos((p-1)\theta)$
Comme

$$2\cos\alpha\cos((p-1)\alpha)=\cos(p\alpha)-\cos((p-2)\alpha)$$

et

$$2\cos\theta\cos((p-1)\theta)=\cos(p\theta)-\cos((p-2)\theta),$$

pour $\theta\neq\alpha$,

$$2\cos(\alpha)\varphi_{p-1}(\theta)-\varphi_{p-2}(\theta)+2\cos((p-1)\theta)=\frac{\cos(p\theta)-\cos(p\alpha)}{\cos\theta-\cos\alpha}=\varphi_p(\theta)$$

De même, $2\cos(\alpha)\varphi_{p-1}(\alpha)-\varphi_{p-2}(\alpha)+2\cos((p-1)\alpha)$ vaut :

$$\frac{2(p-1)\cos\alpha\sin((p-1)\alpha)-(p-2)\sin((p-2)\alpha)+2\sin\alpha\cos((p-1)\alpha)}{\sin\alpha}$$

égal encore à :

$$\frac{(p-1)\big[\sin(p\alpha)+\sin((p-2)\alpha)\big]-(p-2)\sin((p-2)\alpha)+\big[\sin(p\alpha)-\sin((p-2)\alpha)\big]}{\sin\alpha}$$

et donc égal à :

$$p\frac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha}=\varphi_p(\alpha).$$

**V.1.d) Calcul de $\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\,d\theta$**

Désignons par $\mathcal{P}_n$ la propriété : «Pour tout entier naturel $k$, $1\leq k\leq n$, $\int_0^\pi \varphi_k(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{k}\varphi_k(\alpha)$».
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
Pour $p\geq 3$, supposons que $\mathcal{P}_{p-1}$ soit vraie.
Alors :

$$\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\,d\theta=\int_0^\pi\big[2\cos\alpha\varphi_{p-1}(\theta)-\varphi_{p-2}(\theta)+2\cos((p-1)\theta)\big]\,d\theta$$

$$\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\,d\theta = 2\cos\alpha\ \frac{\pi}{p-1}(p-1)\frac{\sin((p-1)\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{\pi}{p-2}(p-2)\frac{\sin((p-2)\alpha)}{\sin\alpha} + \Big[\frac{2}{p-1}\sin((p-1)\theta)\Big]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\,d\theta = \pi\Big(\frac{2\cos\alpha\sin((p-1)\alpha) - \sin((p-2)\alpha)}{\sin\alpha}\Big)$$

$$\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\,d\theta = \pi\frac{\big[\sin(p\alpha)+\sin((p-2)\alpha)\big] - \sin((p-2)\alpha)}{\sin\alpha} = \pi\frac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{p}\varphi_p(\alpha)$$

Donc $\mathcal{P}_n$ est récurrente à partir de $n=2$.

**V.2) La famille $(L_k)_{0\le k\le n}$ est une base de $E_n$.**

Cherchons les $(n+1)$-uplets $(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k,\ \ldots,\ \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \ldots + \lambda_k L_k(x) + \ldots + \lambda_n L_n(x) = 0$$

Pour $0\le i\le n$, donnons à $x$ la valeur $x_i$.
Pour $0\le k\le n$ et $k\ne i$, $L_k(x_i)=0$ et $x_i$ étant un zéro simple de $T_{n+1}$,

$$L_i(x_i)\ne 0.$$

L'égalité :

$$\lambda_0 L_0(x_i) + \lambda_1 L_1(x_i) + \ldots + \lambda_k L_k(x_i) + \ldots + \lambda_n L_n(x_i) = 0$$

se réduit donc à :

$$\lambda_i L_i(x_i) = 0$$

donc chaque $\lambda_i$ est nul.
Les $L_i$, $0\le i\le n$ forment donc une famille libre de $E_n$.

$T_{n+1}$ appartient à $E_{n+1}$ donc chaque $L_i$ appartient à $E_n$.
$(L_i)_{0\le i\le n}$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est donc une base de $E_n$.

**Écriture de $P$ dans la base $(L_k)_{0\le k\le n}$ .**

$P$ étant un élément de $E_n$, on désigne par $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ le $(n+1)$-uplet de ses coordonnées dans la base $(L_i)_{0\le i\le n}$.

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i$$

$x_k$ étant un zéro de $T_{n+1}$, nous avons, d'après une remarque faite plus haut, pour $k\ne i$,

$$L_i(x_k) = 0.$$

Donc pour $0\le k\le n$, $P(x_k) = a_k L_k(x_k)$, c'est-à-dire :

$$a_k = \frac{P(x_k)}{L(x_k)}$$

**V.3.a) Pour tout polynôme $P\in E_n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P(x_k)$**

$P$ étant un polynôme de $E_n$, on le décompose dans la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x_k)}{L(x_k)} L_k(x)$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx$ peut être calculé en effectuant le changement de variable $x = \cos\theta$ :

$$\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x_k)}{L(x_k)} L_k(\cos\theta)\,d\theta$$

Mais

$$L_k(\cos\theta) = \frac{T_{n+1}(\cos\theta)}{\cos\theta - x_k} = \frac{T_{n+1}(\cos\theta) - T_{n+1}(\cos\alpha_k)}{\cos\theta - \cos\alpha_k} = \frac{\cos((n+1)\theta) - \cos((n+1)\alpha_k)}{\cos\theta - \cos\alpha_k}$$

avec, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{(n-k)\pi}{n+1}$$

(Voir le paragraphe I.3. De plus la suite $(x_k)_{0\leq k\leq n} = (\cos(\alpha_k))_{0\leq k\leq n}$ est une suite croissante.)
Donc :

$$L_k(\cos\theta) = \varphi_{n+1}(\theta)$$

avec le $\alpha$ de la question V.1 remplacé par $\alpha_k$.
Alors :

$$\int_{0}^{\pi} L_k(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{n+1}\varphi_{n+1}(\alpha_k) = \frac{\pi}{n+1} L_k(\cos\alpha_k) = \frac{\pi}{n+1} L_k(x_k)$$

d'où nous tirons :

$$\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P(x_k)$$

**V.3.b) L'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P(x_k)$ est vraie pour tout polynôme de $E_{2n+1}$**

Soit $P$ un polynôme de $E_{2n+1}$. Effectuons la division euclidienne de $P$ par $T_{n+1}$ :

$$P = Q_n T_{n+1} + R_n$$

avec $Q_n \in E_n$ et $R_n \in E_n$. Alors :

$$\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} w(x)Q_n(x)T_{n+1}(x)\,dx + \int_{-1}^{1} w(x)R_n(x)\,dx$$

Il existe $n+1$ réels uniques $b_0$, $b_1$, …, $b_n$ tels que :

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} b_i T_i.$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} w(x)Q_n(x)T_{n+1}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} w(x)\sum_{i=0}^{n} b_i T_i(x)T_{n+1}(x)\,dx = 0$$

en vertu de la question II.3.
D'autre part pour tout $k$ entier, $0 \leq k \leq n$,

$$P(x_k) = R_n(x_k)$$

car $T_{n+1}(x_k) = 0$. Donc :

$$\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} w(x)R_n(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} R_n(x_k) = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P(x_k)$$