Banque PT 99 Épreuve IA

Partie I

1. Il est de notoriété publique que $\sin t \underset{0}{\sim} t$, donc la fonction f peut être prolongée par continuité en 0 par le choix $f(0) = 1$.

2. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F, qui en est la primitive s'annulant en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$, et $F' = f$.

   Dressons le tableau de variations de F dans l'intervalle $[2k\pi, (2k+3)\pi[$:

x	$2k\pi$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$		$(2k+3)\pi$
$F' = f$	0	+	0	−	0	+	0
F	θ_{2n}	$\nearrow$	θ_{2n+1}	$\searrow$	θ_{2n+2}	$\nearrow$	θ_{2n+3}

3. (a) $\theta_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Dans chaque intégrale, faisons le changement de variable $t = u + k\pi$:

   $\theta_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (-1)^k \frac{\sin u}{u + k\pi}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   On remarque que $\forall t \in [0, \pi]$, $\dfrac{1}{t + n\pi} \geq \dfrac{1}{t + (n+1)\pi}$, donc $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.

   De plus, $|u_n| \leq \dfrac{1}{n\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Enfin (u_n) est alternée en signe.

   Le théorème spécial aux séries alternées nous permet de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

   (b) $\theta_{2n+2} - \theta_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n} = -(|u_{2n+1}| - |u_{2n}|) \geq 0$, et $\theta_{2n+3} - \theta_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$.

   Les suites $(\theta_{2n})_n$ et $(\theta_{2n+1})_n$, extraites de la suite des sommes partielles $(\theta_n)_n$ de la série convergente $\sum u_n$, sont donc convergentes, et adjacentes.

   (c) $|u_n| \geq \dfrac{1}{(n+1)\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)\pi}$. Or, par analogie avec les séries de Riemann, la série $\sum \dfrac{2}{(n+1)\pi}$ est divergente. Donc, puisque toutes les suites impliquées sont positives, et par application du théorème de convergence comparée, la série $\sum |u_n|$ est divergente. La série $\sum u_n$ n'est donc pas absolument convergente.

4. On pourrait utiliser les résultats précédents, et revenir à la définition en encadrant la somme partielle $\displaystyle\int_0^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ entre un θ_{2n} et un θ_{2n+1} pour n convenablement choisi.

   Mais on peut utiliser une méthode toute aussi classique : une intégration par parties :

   $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Or $\left[-\dfrac{\cos t}{t}\right]_1^X = \cos 1 - \dfrac{\cos X}{X} \to [X \to +\infty] \cos 1$. D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente (par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$). $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, étant la somme partielle de cette intégrale, admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$.

   Donc $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$, i.e. l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   La borne en 0 ne posant pas de problème, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Cette intégrale n'est pas absolument convergente, en effet $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} |u_n| \to [X \to +\infty] +\infty$.

Partie II

1. On a déjà vu que l'intégrale définissant $\varphi(0)$ converge.
   Pour $s > 0$, $x \mapsto e^{-sx} f(x)$ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   $\left|e^{-sx} f(x)\right| \leq e^{-sx}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x$ converge. Ceci prouve la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $s > 0$.

   Bien que cela ne soit pas exigé par l'énoncé, on peut montrer, avec un peu d'astuce, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne converge pas pour $s < 0$.

   Soit donc $s < 0$. Notons $\Phi(X) = \displaystyle\int_0^{X} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$ convergeait, la somme partielle $\Phi(X)$ devrait admettre une limite finie M lorsque X tend vers $+\infty$. De même, la suite $(\Phi(n\pi))$ devrait admettre cette même limite, et donc $\Phi((n+1)\pi) - \Phi(n\pi)$ devrait tendre vers $M - M = 0$.

   Or, $|\Phi((n+1)\pi) - \Phi(n\pi)| = \left|\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq 2\dfrac{e^{-sn\pi}}{(n+1)\pi} \to [n \to \infty] + \infty$.

2. $\lambda : (s, x) \mapsto e^{-sx} f(x)$ est, d'après les théorèmes généraux, continue sur $[a, +\infty[\times\mathbb{R}^+$.
   De plus, $\forall x \geq 0$, $\left|e^{-sx} f(x)\right| \leq e^{-ax}$, dont l'intégrale converge sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de continuité des intégrales impropres à paramètre nous permet de conclure que φ est continue sur $[a, +\infty[$.

   De plus, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial s} : (s, x) \mapsto -xe^{-sx} f(x)$ est elle aussi continue sur $[a, +\infty[\times\mathbb{R}^+$.

   $\forall x \geq 0, \forall s \geq a$, $\left|-xe^{-sx} f(x)\right| \leq xe^{-ax}$. Or $x^2\left(xe^{-ax}\right) \to [x \to \infty]0$, donc il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $xe^{-ax} \leq \dfrac{1}{x^2}$, dont l'intégrale converge sur $[A, +\infty[$. Ceci prouve la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax}\,\mathrm{d}x$, qui était la dernière hypothèse à vérifier pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme des intégrales impropres à paramètre.

   Donc $\forall a > 0$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. On en conclut que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

   $\varphi'(s) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin x\,\mathrm{d}x$. Cherchant une primitive de la forme $x \mapsto e^{-sx}(A\cos x + B\sin x)$ (voir cours sur les équations différentielles linéaires, celui sur le calcul des primitives... ou la calculette), on trouve :

   $\varphi'(s) = \left[\dfrac{e^{-sx}}{1+s^2}(\cos x + s\sin x)\right]_0^{+\infty} = -\dfrac{1}{1+s^2}$.

3. En utilisant une majoration déjà utilisée : $|\varphi(s)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{s} \to [x \to \infty]0$, donc $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$.

   φ est donc la primitive de $s \mapsto -\dfrac{1}{1+s^2}$ de limite nulle en $+\infty$, donc $\forall s > 0$, $\varphi(s) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan s$.

Partie III

1. Profitant du fait que $s\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = 1$, on obtient : $\delta(s) = s\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}(g(x) - \alpha)\,\mathrm{d}x$.

2. Le comportement de g au voisinage de $+\infty$ permet d'affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}(g(x) - \alpha)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Coupons alors cette intégrale en deux :

   $|\delta(s)| \leq s\left|\displaystyle\int_0^{A} e^{-sx}(g(x) - \alpha)\,\mathrm{d}x\right| + s\left|\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-sx}(g(x) - \alpha)\,\mathrm{d}x\right| \leq s\displaystyle\int_0^{A} |g(x) - \alpha|\,\mathrm{d}x + \varepsilon$.

3. Soit $s > 0$. D'après ce qui précède, dés que $s < \dfrac{1}{\int_0^A |g(x) - \alpha|\, \mathrm{d}x}$ (valable même si cette intégrale est nulle), $|\delta(s)| < 2\varepsilon$. par retour à la définition, on en déduit que $\lim\limits_{0} \delta$ existe et vaut 0.

   Ceci revient à dire que $\lim\limits_{s \to 0} s\gamma(s) = \alpha$.

Partie IV

1. La présence de f et d'une de ses primitives F invite à effectuer une intégration par parties. Dans le calcul qui suit, on ne reviendra pas à distance finie, ayant déjà prouvé maintes fois que tout convergeait.
   $s \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x)\, \mathrm{d}x = \left[-e^{-sx} F(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, \mathrm{d}x$ puisque $F(0) = 0$.

2. D'après la question précédente, $s \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\tan} s \to [s \to 0] \frac{\pi}{2}$.

   F admettant une limite finie en $+\infty$ (convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$), d'après la partie III, on doit avoir $\displaystyle\lim_{s \to 0} s \int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{x \to +\infty} F(x)$. D'où la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

3. Remarquons que les fonctions I et C sont respectivement impaires et paires. Intéressons-nous donc seulement au cas $x \geq 0$.

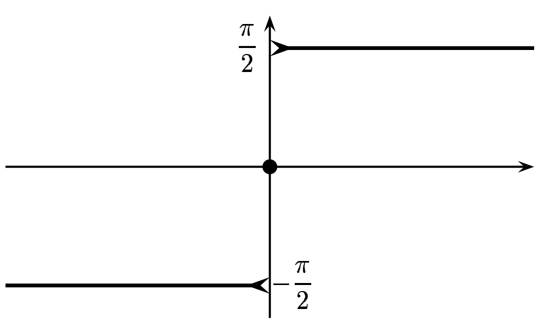
   $I(0) = 0$, et, par le changement de variable $u = xt$, pour $x > 0$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$. Ceci prouve la convergence de l'intégrale définissant $I(x)$ pour tout x réel, et donne la valeur de $I(x)$:

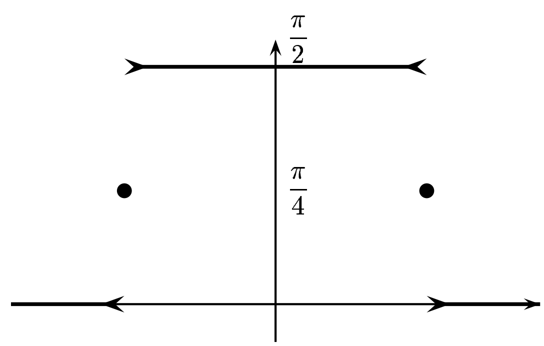
   $$I(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

   Utilisant la formule de linéarisation bien connue (!?) $\sin t \cos xt = \dfrac{1}{2}(\sin(x+1)t - \sin(x-1)t)$, on en déduit la convergence de l'intégrale définissant $C(x)$ aussi pour tout x réel, et les valeurs :

   $$C(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \pi/4 & \text{si } x = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

   Voici donc les graphes des deux fonctions :





Partie V

1. Effectuons deux intégrations par parties successives, en veillant bien à toutes les étapes à ne pas écrire d'intégrales divergentes :
   $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} - \left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\, \mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \rho(x)$,

avec $|\rho(x)| \leq 2\int_x^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^3}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$.

Comme $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} - \rho(x)$, ceci prouve la relation de récurrence au rang 2 avec $R_2(x) = -\rho(x)$. Elle a déjà été vérifiée au rang 1 auparavant (on rappelle en effet que retrancher $\pi/2$ à l'argument d'un sinus ou d'un cosinus revient à l'intégrer).

Supposons qu'au rang n, $R_n(x) = -n!\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t - n\pi/2)}{t^{n+1}}$. Par une intégration par parties similaire à celles déjà effectuées, on obtient :

$R_n(x) = -\left[n!\frac{\sin(t-(n+1)\pi/2)}{t^{n+1}}\right]_x^{+\infty} - (n+1)!\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-(n+1)\pi/2)}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t = n!\frac{\sin(x-(n+1)\pi/2)}{x^{n+1}} + R_{n+1}(x)$.

Ceci fournit la preuve demandée.

2. La suite (v_n) est à terme positifs, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{x}$, donc la suite est décroissante pour n compris entre 1 et x, croissante après.

   Comme à partir d'un certain rang, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 2$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. D'après ce qui précède, $|R_n|$ atteint son minimum pour $n = 50$, en lequel il vaut moins de 7.10^{-23}. On a de la marge !

   Pour $n = 3$, on a $v_3 < 2.10^{-5}$, donc $\left|F(50) - \frac{\pi}{2} - \frac{\cos 50}{50} - \frac{\sin 50}{50^2} + 2\frac{\cos 50}{50^3}\right| < 2.10^{-5}$.

   Effectuons les calculs à 5.10^{-6} près, on obtient $1,55760 \leq F(50) \leq 1,55768$, donc $1,5576$ est une valeur approchée à 10^{-4} près de $F(50)$.

4. Pour $x = 1$, la suite $(R_n(x))$ est croissante, de borne inférieure 1. Donc toute valeur approchée de F(1) ne peut, par cette méthode, être obtenue à mieux de 1 près.

   Cette méthode de développement est donc intéressante pour de grandes valeurs de x. Comme pour la formule de Stirling, plus x est grand, plus la valeur approchée obtenue sera fiable. En effet, le minimum de v_n tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.