sportisse.lucien@orange.fr

Corrigé

Partie A

1)

Une CNS pour que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit inversible est que $\boxed{\det A \neq 0}$. Dans ce cas $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}}$.

2)

On sait que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse est égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(\operatorname{Com} A)$$

où $\operatorname{Com} A$ désigne la matrice des cofacteurs de A.
Dans le cas général, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, si $\det A = ad - bc \neq 0$, on a donc : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
On applique cette formule aux trois cas proposés. On trouve :

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ A_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

3)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$. A est inversible si et seulement si $\det A = ad - bc \neq 0$; Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Pour que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il faut que son déterminant $\dfrac{1}{ad-bc}$ soit un entier relatif, donc nécessairement $\det A = ad - bc \in \{-1, 1\}$.
Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifie $\det A = ad - bc \in \{-1,1\}$, alors, A est inversible et son inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$,

Donc, pour que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ admette une matrice inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il faut et il suffit que $\det A = ad - bc \in \{-1, 1\}$.

4)

On note $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$, le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut 1. Les matrices de cet ensemble sont donc inversibles et leur inverse est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$. $A_4 \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A_4 = 5 - bc = 1 \iff bc = 4$. Comme $(b,c) \in \mathbb{Z}^2$, on obtient les couples (b,c) suivants :

$$\boxed{(4,1),\ (-4,-1),\ (1,4),\ (-1,-4),\ (2,2),\ (-2,-2)}$$

Partie B

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel $p \neq 0$, vérifiant $A^p = \mathrm{I}_2$. Pour chaque matrice $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel $q \neq 0$, tel que $A^q = \mathrm{I}_2$. On le note $h(A)$; il est appelé l'ordre de la matrice A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1)

Comme $A^p = \mathrm{I}_2$, alors $(\det A)^p = \det \mathrm{I}_2 = 1$.

$\boxed{\text{Ce qui implique que } \det A \in \{-1, 1\}\text{. D'après la question A-3, } A \text{ est inversible et son inverse est élément de } \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).}$

2)

Alors $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = \mathrm{I}_2$. Ainsi, $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A^{-1}) \leqslant p = h(A)$. En intervertissant les rôles de A et de son inverse, on a aussi $h(A) \leqslant h(A^{-1})$.

On a utilisé le fait que l'ordre d'une matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ est le plus petit entier naturel non nul p tel que $A^p = \mathrm{I}_2$.

Ainsi $\boxed{h(A^{-1}) = p = h(A)}$

3)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Il existe donc $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$, tel que $AU = \lambda U$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. D'où $A^p U = \lambda^p U$.

Comme $A^p = \mathrm{I}_2$, alors $\lambda^p U = U$, et puisque $U \neq 0$, $\lambda^p = 1$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dans } \mathbb{C} \text{ de } A \text{ sont de module 1.}}$

4)

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \det(X\,\mathrm{I}_2 - A) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det A$. Ses racines sont les valeurs propres de A. Donc $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2}$.

5)

Donc $|\mathrm{Tr}(A)| = |a + d| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| = 2$. Comme $(a, d) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$, et on vérifie que $\boxed{\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}}$.

6)

$\boxed{\text{Les matrices } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ appartiennent à } \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})}$, car leurs coefficients sont éléments de $\mathbb{Z}$ et $C^2 = D^2 = \mathrm{I}_2$.

$\boxed{\text{Leur ordre est égal à 2}}$, puisque $C^1 \neq \mathrm{I}_2$ et $D \neq \mathrm{I}_2$.

$M = CD = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$. Sa trace vaut -2, son déterminant -1. Son polynôme caractéristique est $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}\,X + \det M = X^2 + 2X - 1$ admet $-1 \pm \sqrt{2}$ pour racines. Ces nombres sont les valeurs propres de $M = CD$. Elles ne sont pas de module 1.

D'après la question B-3, $\boxed{CD \text{ n'est pas élément de } \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})}$.

7)

$\chi_A(X) = \det(X\,\mathrm{I}_2 - A) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det A$.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 peuvent être réelles, de valeur absolue égale à 1, auquel cas leur produit $\det A = \pm 1$.

Elles peuvent être non réelles mais alors complexes conjuguées, car racines d'un polynôme à coefficients réels, auquel cas $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, et leur produit est $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 = 1$, d'après B-3.

Dans tous les cas $\boxed{\det A = \pm 1}$. Le déterminant de A a deux valeurs possibles ± 1. D'après B-5, la trace de A a elle cinq valeurs possibles, dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$\boxed{\text{Ainsi, le polynôme caractéristique } \chi_A(X) = \det(X\,\mathrm{I}_2 - A) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det A \text{ a dix valeurs possibles.}}$

D'après B-3, il faudra exclure les polynômes dont les racines ne sont pas de module 1.

8)

a. $\boxed{\det A = 1}$.

- Cas 1 : $\mathrm{Tr}\,A = -2$. $\chi_A(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$ a une racine double égale à -1, de valeur absolue 1.
- Cas 2 : $\mathrm{Tr}\,A = -1$. $\chi_A(X) = X^2 + X + 1$ a deux racines conjuguées j et j^2 de module 1.
- Cas 3 : $\mathrm{Tr}\,A = 0$. $\chi_A(X) = X^2 + 1$ a deux racines conjuguées i et $-i$ de module 1.
- Cas 4 : $\mathrm{Tr}\,A = 1$. $\chi_A(X) = X^2 - X + 1$ a deux racines conjuguées $-j$ et $-j^2$ de module 1.
- Cas 5 : $\mathrm{Tr}\,A = 2$. $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ a une racine double égale à 1, de valeur absolue 1.

b. $\boxed{\det A = -1}$.

- Cas 6 : $\operatorname{Tr} A = -2$. $\chi_A(X) = X^2 + 2X - 1$ a deux racines réelles $-1 \pm \sqrt{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.
- Cas 7 : $\operatorname{Tr} A = -1$. $\chi_A(X) = X^2 + X - 1$ a deux racines réelles $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.
- Cas 8 : $\operatorname{Tr} A = 0$. $\chi_A(X) = X^2 - 1$ a deux racines réelles ± 1, de valeur absolue 1.
- Cas 9 : $\operatorname{Tr} A = -1$. $\chi_A(X) = X^2 - X - 1$ a deux racines réelles $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.
- Cas 10 : $\operatorname{Tr} A = 2$. $\chi_A(X) = X^2 - 2X - 1$ a deux racines réelles $1 \pm \sqrt{2}$, **cas exclu** puisqu'une racine est de valeur absolue strictement supérieure à 1.

$\boxed{9\ )}$

Seuls six cas sont donc à retenir. Les cas 6, 7, 9 et 10 sont à exclure.
Rappelons que si le polynôme caractéristique de A est scindé simple, dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, i.e a deux racines distinctes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.
Ainsi, dans les les cas 2,3, 4, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$; dans le cas 8, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Restent les cas 1 et 5, où le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, mais avec une racine double $\varepsilon = \pm 1$. A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et semblable à une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $A^p = \mathrm{I}_2$.Il est facile de vérifier par récurrence que :

$$T^p = \begin{pmatrix} \varepsilon^p & p\alpha \\ 0 & \varepsilon^p \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha = 0$$

Ce qui prouve qu'en fait, dans les cas 1 et 5, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Dans les six cas retenus, A est donc diagonalisable dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et donc semblable à la matrice diagonale T de ses valeurs propres. Comme $A^p = \mathrm{I}_2$, on a bien sût $T^p = \mathrm{I}_2$.

a. Cas 1 : $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{I}_2$. $T^2 = \mathrm{I}_2$. L'ordre de A vaut donc 2.

b. Cas 2 : $T = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $T^2 \neq \mathrm{I}_2$ et $T^3 = \mathrm{I}_2$. L'ordre de A vaut donc 3.
On a utilisé la propriété $j^3 = 1$.

c. Cas 3 : $T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On vérifie que $T^3 \neq \mathrm{I}_2$ et $T^4 = \mathrm{I}_2$. L'ordre de A vaut donc 4.

d. Cas 4 : $T = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $T^2 \neq \mathrm{I}_2$ et $T^3 = \mathrm{I}_2$. L'ordre de A vaut donc 3.

e. Cas 5 : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$. L'ordre de A vaut donc 1.

f. Cas 8 : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{I}_2$. $T^2 = \mathrm{I}_2$. L'ordre de A vaut donc 2.

$\boxed{10\ )}$

$P_2 = 12$ est le plus petit commun multiple des divers ordres trouvés.
Il vérifie bien la propriété demandée :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}),\ A^{p_2 = 12} = \mathrm{I}_2}$$

Partie C

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
On considère l'application φ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

$\boxed{1\ )}$

La linéarité de l'intégrale montre que φ est une forme linéaire par rapport au premier argument, i.e :

$$\forall (P, Q, R) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$$

La forme est évidemment symétrique, i.e $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$.
La forme est positive : $\forall P\in E,\ \varphi(P,P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt\geqslant 0$, car P^2 est cpm et positive sur $[-1,1]$.
Soit $P\in E$, tel que $\varphi(P,P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt=0$. Comme P^2 est positif et continu sur $[-1,1]$, alors le polynôme P^2 s'annule en tout point de $[-1,1]$, et ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul, de même que P.
On a montré que $\forall P\in E,\ \varphi(P,P)=0\Longrightarrow P=0$, ce qui prouve que la forme φ est définie.

$\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie sur } E \text{ : c'est un produit scalaire sur } E.}$

La norme euclidienne associée est définie par :

$$\boxed{\forall P\in E,\ ||P||^2=\varphi(P,P)=\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt}$$

$\boxed{2\ )}$

Il s'agit bien sûr du procédé d'orthogonalisation de Schmidt.
Posons, quel que soit $i\in\{0,1,2,3\}$, $F_i=\mathrm{Vect}((X_j)_{0\leqslant j\leqslant i}$.
On notera p_i le projecteur orthogonal sur F_i.
On va démontrer par récurrence sur i la propriété $\mathcal{P}_i$: il existe une base orthonormale unique $\pi_0,\dots,\pi_i$ de F_i telle que, quel que soit $j\in[[0,i]]$, $\varphi(X^j,\pi_j)\geqslant 0$.
Initialisation : pour $i=0$, $\pi_0=\alpha_0X^0$. $\begin{cases} ||\pi_0||^2=\alpha_0^2||X^0||^2=2\alpha_0^2 & = & 1\\ \varphi(\pi_0,X^0)=\alpha_0\varphi(X^0,X^0)=2\alpha_0 & \geqslant & 0\end{cases}\Longrightarrow \alpha_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pi_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}X^0$
Hérédité : supposons la propriété vérifiée pour $i-1\in\{0,1,2\}$.
Alors, nécessairement $X^i=\alpha_i\pi_i+Y_i,\ \alpha_i\neq 0,\ Y_i\in F_{i-1}$.
Comme $\pi_i\in F_{i-1}^{\perp}$, nécessairement $Y_i=p_{i-1}(X^i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\varphi(X^i,\pi_j)\pi_j$.
De plus $||X^i||^2=\alpha_i^2||\pi_i||^2+||Y_i||^2=\alpha_i^2+\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\varphi(X^i,\pi_j)^2$.
D'autre part $\underbrace{\varphi(X^i,\pi_i)}_{\geqslant 0}=\alpha_i\varphi(X^i,X^i)+\underbrace{\varphi(Y_i,\pi_i)}_{=0}=\alpha_i\underbrace{||X^i||^2}_{>0}\Longrightarrow\alpha_i\geqslant 0$.
D'où $\alpha_i=\sqrt{||X^i||^2-\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\varphi(X^i,\pi_j)^2}$ et $\pi_i=\dfrac{1}{\sqrt{||X^i||^2-\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\varphi(X^i,\pi_j)^2}}\left(X^i-\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\varphi(X^i,\pi_j)\pi_j\right)$.
Ces formules montrent l'existence-unicité demandée et donnent le procédé de construction de la base orthonormale.
On trouve successivement :

$$\boxed{\pi_0=\frac{\sqrt{2}}{2}X^0,\ \pi_1=\frac{\sqrt{6}}{2}X,\ \pi_2=\frac{3}{4}\sqrt{10}\left(X^2-\frac{1}{3}\right),\ \pi_3=\frac{5}{4}\sqrt{14}\left(X^3-\frac{3}{5}X\right)}$$

$\boxed{3\ )}$

a. Soit $P\in E$, $||P||^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt=1$. Comme $(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ est une base de E, on peut décomposer de manière unique P dans cette base :

$$\boxed{P=\sum_{i=0}^{3}\alpha_i\pi_i}$$

b. Et comme la base est orthonormale :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{3}\alpha_i^2=||P||^2=\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt=1}$$

c. (i) Considérons $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne naturelle, par le produit scalaire naturel noté $><.,.>$, la base canonique est alors une base orthonormale. Appliquons la formule de Cauchy aux vecteurs $U=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

et $U' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d \end{pmatrix}$:

$$\boxed{|< U, U' >| = |aa' + bb' + cc' + dd'| \leqslant ||U||\,||U'|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}}$$

(ii) En appliquant cette formule à $P(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i(x)$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |P(x)| \leqslant \underbrace{\sqrt{\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2}}_{=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \pi_i^2(x)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \pi_i^2(x)}}$$

d. Donc :

$$\forall x \in [-1,1],\ |P(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \sup_{x\in[-1,1]} \pi_i^2(x)} \Rightarrow \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \sup_{x\in[-1,1]} \pi_i^2(x)}$$

Les fonctions π_i^2 sont continues sur le segment $[-1,1]$ et y sont donc bornées, d'où l'existence des bornes supérieures.
Bien sûr, $\sup_{x\in[-1,1]} \pi_0^2 = \frac{1}{2}$, $\sup_{x\in[-1,1]} \pi_1^2 = \frac{6}{4}$. La fonction π_2 est représentée par une parabole de sommet $(0, -\frac{\sqrt{10}}{4})$.
$\pi_2(1) = \frac{\sqrt{10}}{2}$. En raison de la parité, on a donc $\sup_{x\in[-1,1]} \pi_2^2 = \frac{10}{4}$.
La fonction π_3 est impaire. On l'étudie sur $[0,1]$. $\pi_3'(x) = \frac{15}{4}\sqrt{14}\left(X^2 - \frac{1}{5}\right)$. π_3 est donc décroissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{5}}]$, croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1]$. On vérifie facilement que $\sup_{x\in[-1,1]} \pi_2^2 = \pi_3^2(1) = \frac{14}{4}$. D'où :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \sup_{x\in[-1,1]} \pi_i^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{6}{4} + \frac{10}{4} + \frac{14}{4}} = 2\sqrt{2}}$$