Centrale 2010 – filière MP – Maths 1

(Jean-Pierre Roudneff, Louis-le-Grand)

Partie I - Questions géométriques

I.A.1°) – Tout $z \in \tau_0$ s'écrit $-\alpha + \beta.0 + \gamma.i$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$ donc $z = \big(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\big).(-1) + \dfrac{\beta}{2}.1 + \gamma.i$ appartient aussi à τ étant donné que $\big(\alpha + \dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\beta}{2}, \gamma\big) \in K$, d'où l'inclusion $\tau_0 \subset \tau$.
– On prouve de même que $\tau_1 \subset \tau$.

Remarque : on peut montrer plus généralement par associativité du barycentre, que si $A \subset B$, alors l'enveloppe convexe de A est incluse dans celle de B.

– Soit $z \in \tau$: il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$ tel que $z = -\alpha + \beta + \gamma.i$.
Si $\alpha \geqslant \beta$, alors $z = (\alpha - \beta).(-1) + 0.1 + \gamma.i$ appartient à τ_0 vu que $(\alpha - \beta, 0, \gamma) \in K$ et, dans le cas contraire, $z = 0.(-1) + (\beta - \alpha).1 + \gamma.i$ appartient à τ_1.
Ceci établit l'inclusion $\tau \subset \tau_0 \cup \tau_1$, et conduit à l'égalité recherchée.

I.A.2°) Le tracé des triangles τ_0 de sommets $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, et τ_1 de sommets $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, ne pose aucun problème.

I.A.3°)a) L'application $s : z \longmapsto z' = a + e^{2i\theta}.\overline{z - a}$ est une isométrie du plan affine euclidien $\mathbb{C}$.
En effet, $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|s(z_1) - s(z_2)| = |e^{2i\theta}.\overline{z_1 - z_2}| = |z_1 - z_2|$.
De plus, si z s'écrit $a + te^{i\theta}$ avec $t \in \mathbb{R}$, alors $s(z) = z$: la droite Δ passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$ est donc incluse dans l'ensemble des points fixes de s et ce dernier ne peut pas être de dimension supérieure à 1 sinon s serait l'identité. En résumé, s est une isométrie plane dont l'ensemble des points invariants est une droite Δ, donc s est la réflexion d'axe Δ.

I.A.3°)b) L'image de z par l'homothétie de centre a et de rapport ρ est immédiatement donnée par $z' = a + \rho.(z - a)$.

I.A.3°)c) Si ϕ_0 se décompose sous la forme (commutative) $s_0 \circ h_0 = h_0 \circ s_0$, où s_0 est la réflexion d'axe Δ_0 et h_0 l'homothétie de centre $a \in \Delta_0$ et de rapport ρ, alors a est un point fixe de ϕ_0, d'où $a = \dfrac{1+i}{2}\overline{a} + \dfrac{-1+i}{2}$, ce qui conduit rapidement à $a = -1$. On a alors $\phi_0(z) - a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}(z - a)$. Comme on doit avoir $\forall z \in \mathbb{C}$, $\phi_0(z) = \rho e^{i\theta}(z - a)$, on a nécessairement $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4} \mod 2\pi$ en prenant $z \neq a$.
Réciproquement, ces valeurs conviennent, ce qui prouve l'existence et l'unicité de la décomposition.
De même, ϕ_1 s'écrit (de manière unique) $s_1 \circ h_1 = h_1 \circ s_1$, où s_1 est la réflexion d'axe Δ_1 passant par 1 et dirigé par $e^{-i\pi/4}$ et h_1 l'homothétie de centre 1 et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

I.A.4°) L'application ϕ_0 étant affine, elle conserve le barycentre, donc $\phi_0(\widehat{abc}) = \widehat{a'b'c'}$ avec $a' = \phi_0(a)$, $b' = \phi_0(b)$ et $c' = \phi_0(c)$.
En particulier, $\phi_0(\tau) = \widehat{-1\, i\, 0} = \tau_0$ et on obtient de même $\phi_1(\tau) = \tau_1$.

I.B.1°)a) – K s'écrit $(\mathbb{R}^+)^3 \cap F$, où F est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \alpha + \beta + \gamma$: l'ensemble K est ainsi fermé comme intersection de deux fermés.
– K est également borné car si $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$, alors $|\alpha| \leqslant 1$, $|\beta| \leqslant 1$ et $|\gamma| \leqslant 1$.
Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, K est bien un compact.

I.B.1°)b) Si $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $u' = (\alpha', \beta', \gamma')$ appartiennent à K et $t \in [0, 1]$, alors $tu + (1-t)u' = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est également dans K vu que

$$\alpha'' = t\alpha + (1-t)\alpha' \geqslant 0, \quad \beta'' = t\beta + (1-t)\beta') \geqslant 0, \quad \gamma'' = t\gamma + (1-t)\gamma'' \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 1.$$

L'ensemble K est donc convexe.

I.B.1°)c) – L'application $F : (\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \alpha a + \beta b + \gamma c$ étant continue, $\widehat{abc} = F(K)$ est compact comme image directe d'un compact par une application continue.
– La convexité de $\widehat{abc}$ s'obtient soit directement, par des calculs similaires à ceux du **b)**, soit en remarquant qu'il s'agit de l'image directe du compact K par une application affine.

I.B.1°)d) L'application $(z, z') \longmapsto |z-z'|$ est continue sur $\mathbb{C}^2$ (par exemple comme composée de l'application linéaire $(z, z') \longmapsto z - z'$ et de l'application 1-lipschitzienne $z \longmapsto |z|$).
$\widehat{abc}$ étant compact, cette application atteint sa borne supérieure sur $\widehat{abc} \times \widehat{abc}$ d'après le théorème des bornes, d'où l'existence de $\delta(\widehat{abc})$.

I.B.2°)a) Soit $z' = \alpha a + \beta b + \gamma c$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$. Alors $|z' - z| = |\alpha(a-z) + \beta(b-z) + \gamma(c-z)|$ donc

$$|z' - z| \ \leqslant\ \alpha|a-z| + \beta|b-z| + \gamma|c-z| \ \leqslant\ (\alpha + \beta + \gamma) \max(|a-z|, |b-z|, |c-z|).$$

On a ainsi $|z' - z| \leqslant \max(|a-z|, |b-z|, |c-z|)$ et l'égalité étant atteinte pour $z' = a, b$ ou c, on peut conclure que $\max\{|z' - z|,\ z' \in \widehat{abc}\} = \max(|a-z|, |b-z|, |c-z|)$.

I.B.2°)b) On remarque, via le théorème des bornes à nouveau que

$$\delta(\widehat{abc}) \ = \ \max\big\{\max\{|z - z'|,\ z \in \widehat{abc}\},\ z' \in \widehat{abc}\big\} \ = \ \max\big\{\max(|z'-a|, |z'-b|, |z'-c|),\ z' \in \widehat{abc}\big\},$$

soit $\delta(\widehat{abc}) \ = \ \max(|a-b|, |b-c|, |c-a|)$ en appliquant le **2°)a)** aux éléments a, b et c.

I.B.2°)b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_{r_n}(\tau) \subset \tau$ donc $\widetilde{\tau}_n \subset \widetilde{\tau}_{n-1}$. De plus, chaque ϕ_{r_i} divisant les distances par $\sqrt{2}$, on a clairement $\delta(\widetilde{\tau}_n) = \dfrac{\delta(\tau)}{2^{n/2}}$.
Montrons alors (propriété qui généralise le théorème des segments emboîtés) qu'une suite décroissante de compacts non vides dont les diamètres tendent vers 0 a une intersection réduite à un singleton. Considérons pour cela une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in \widetilde{\tau}_n$: celle-ci est de Cauchy étant donné que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \delta(\widetilde{\tau}_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(\widetilde{\tau}_n) = 0$, donc converge vers un certain x qui appartient à chaque $\widetilde{\tau}_n$ puisque ces derniers sont fermés. On a donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \widetilde{\tau}_n \neq \varnothing$ et cette intersection ne peut pas contenir plus d'un élément vu que son diamètre est inférieur à celui de chaque $\widetilde{\tau}_n$.

Partie II - Construction de l'application f

II.1°) Une application affine de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme $x \longmapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Elle appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $\beta = -1$ et $\alpha + \beta = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $(\alpha, \beta) = (2, -1)$.

II.2°) Si $g \in \mathcal{E}$, alors, par composition, Tg est continue sur $\big[0, \frac{1}{2}\big[$ ainsi que sur $\big]\frac{1}{2}, 1\big]$.
De plus, $Tg(x)$ a pour limite $\phi_0(1)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, et $\phi_1(-1)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures. Comme $\phi_0(1) = \phi_1(-1) = i$, la fonction Tg est également continue au point $\frac{1}{2}$.
enfin, $Tg(0) = \phi_0(-1) = -1$ et $Tg(1) = \phi_1(1) = 1$ donc $Tg \in \mathcal{E}$.

II.3°) – Pour tout $x \in \big[0, \frac{1}{2}\big]$, $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| = |\phi_0(g_2(2x)) - \phi_0(g_1(2x))| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|g_2(2x) - g_1(2x)|$.
– Pour tout $x \in \big[\frac{1}{2}, 1\big]$, $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| = |\phi_1(g_2(2x-1)) - \phi_1(g_1(2x-1))| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|g_2(2x-1) - g_1(2x-1)|$.
Or, lorsque x décrit $\big[0, \frac{1}{2}\big]$ (resp. $\big[\frac{1}{2}, 1\big]$), le réel $t = 2x$ (resp $t = 2x-1$) décrit $[0, 1]$. Par suite,

$$\| Tg_2 - Tg_1 \|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sup\{|g_2(t) - g_1(t)|,\ t \in [0,\,1]\} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\, \| g_2 - g_1 \|_\infty\,.$$

II.4°a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\| f_{n+p} - f_n \|_\infty = \frac{1}{2^{n/2}}\, \| f_p - f_0 \|_\infty \leqslant \frac{1}{2^{n/2}} \big[\, \| f_p - f_{p-1} \|_\infty + \cdots + \| f_1 - f_0 \|_\infty \,\big]$$

par inégalité triangulaire, d'où $\| f_{n+p} - f_n \|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^{n/2}} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^k\, \| f_1 - f_0 \|_\infty$. En majorant $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^k$ par la somme $\dfrac{1}{1 - 1/\sqrt{2}}$ de la série géométrique associée, il vient $\| f_{n+p} - f_n \|_\infty \leqslant \dfrac{C}{2^{n/2}}$, où C désigne une constante. Il en ressort que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \| f_{n+p} - f_n \|_\infty \leqslant \varepsilon.$
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait ainsi le critère de Cauchy uniforme, donc converge uniformément vers une fonction $f : [0,\,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, qui est continue car chaque f_n l'est.
Enfin, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, donc f appartient à $\mathcal{E}$.

II.4°b) L'application $T : g \longmapsto Tg$ étant continue sur $\mathcal{E}$ car lipschitzienne, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f entraîne celle de $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Tf et comme $Tf_n = f_{n+1}$, il vient $Tf = f$ par unicité de la limite.

Remarque : on peut vérifier que $\mathcal{E}$ est un fermé de l'espace complet $\big(\mathcal{C}([0,\,1],\,\mathbb{C}\big)$ (muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$). Comme $\mathcal{E}$ est stable par T et que T est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$-contractante, le théorème du point fixe s'applique et on peut ainsi retrouver la convergence uniforme de $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Tf et le fait que $Tf = f$.

II.4°c) Prouvons par récurrence sur n la propriété $(H_n) :\ \forall x \in [0,\,1],\ f_n(x) = -\overline{f_n(1-x)}$.
– La propriété (H_0) est immédiate vu que $f_0(x) = 2x - 1$.
– Supposons (H_n) vraie. Alors, $\forall x \in \big[0,\, \frac{1}{2}\big]$,

$$f_{n+1}(x) = \phi_0\big(f_n(2x)\big) = \phi_0\big(-\overline{f_n(1-2x)}\big) = -\frac{1+i}{2}.\overline{f_n(1-2x)} + \frac{-1+i}{2}.$$

Or

$$f_{n+1}(1-x) = \phi_1\big(f_n(2(1-x) - 1)\big) = \phi_1\big(f_n(1-2x)\big) = \frac{1-i}{2}.\overline{f_n(1-2x)} + \frac{1+i}{2}$$

d'où $\forall x \in \big[0,\, \frac{1}{2}\big],\ f_{n+1}(x) = -\overline{f_{n+1}(1-x)}$.
La propriété à démontrer étant invariante par le changement de variable $x := 1-x$, l'égalité $f_{n+1}(x) = -\overline{f_{n+1}(1-x)}$ est également vérifiée sur $\big[\frac{1}{2},\, 1\big]$, ce qui établit (H_{n+1}) et achève le raisonnement.

Par passage à la limite simple, on en déduit que $\forall x \in [0,\,1],\ f(x) = -\overline{f(1-x)}$. Comme la transformation complexe définie par $z' = -\overline{z}$ représente la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des imaginaires purs, on en déduit que l'image de f (dont on montrera au **III.** qu'il s'agit de τ) est symétrique par rapport à cet axe.

Partie III - Propriétés de f

III.A)1°)a) $\sum \dfrac{r_n}{2^n}$ est une série à termes positifs dont le terme général est majoré par $\dfrac{1}{2^n}$, terme général d'une série géométrique convergente. La série $\sum \dfrac{r_n}{2^n}$ converge donc et sa somme x est comprise entre 0 et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$, ce qui donne $x \in [0,\,1]$.

III.A)1°)b) Prouvons la propriété recherchée par récurrence sur p.
L'initialisation est due au fait que $x_0 = x$ avec la convention habituelle $\phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_p} = \mathrm{Id}$ lorsque $p = 0$.

Supposons, pour p fixé, que $f(x) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}\big(f(x_p)\big)$.
– Si $r_{p+1} = 0$, alors $r_p = \dfrac{1}{2} r_{p+1} \in \big[0, \dfrac{1}{2}\big]$ donc

$$f(x_p) \;=\; Tf(x_p) \;=\; \phi_0\big(f(2x_p)\big) \;=\; \phi_{r_{p+1}}\big(f(x_{p+1})\big).$$

– De même, si $r_{p+1} = 1$, alors $r_p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} r_{p+1} \in \big[\dfrac{1}{2}, 1\big]$ donc

$$f(x_p) \;=\; Tf(x_p) \;=\; \phi_1\big(f(2x_p - 1)\big) \;=\; \phi_{r_{p+1}}\big(f(x_{p+1})\big).$$

Ceci achève la récurrence et établi la propriété demandée.

III.A)2°)a) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, $k = \big[2^{n-1}x\big]$ est l'unique entier tel que $2^{n-1}x \in [k, k{+}1[$. On a alors $2^n x \in [2k, 2k{+}2[$ donc $\big[2^n x\big] = 2k$ ou $2k{+}1$, si bien que $r_n(x)$ vaut $2k - 2k = 0$ ou $(2k{+}1) - 2k = 1$.

III.A)2°)b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{[2^n x]}{2^n} \;-\; \sum_{n=1}^{N} \frac{2[2^{n-1}x]}{2^n} \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{[2^n x]}{2^n} \;-\; \sum_{n=0}^{N-1} \frac{[2^n x]}{2^n}$ d'où, par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} \;=\; \frac{[2^N x]}{2^N} \;-\; [x] = \frac{[2^N x]}{2^N}.$$

Comme $[2^N x] \in \;]2^N - 1, 2^N x]$, il vient $\dfrac{[2^N x]}{2^N} \in \;]x - \dfrac{1}{2^N}, x]$, d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{[2^N x]}{2^N} = x$, ce qui conduit à l'égalité $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ en faisant tendre N vers $+\infty$.

III.A)2°)c) Si x est de la forme $\dfrac{k}{2^n}$ avec k et N entiers, alors pour tout $n > N$,

$$r_n(x) \;=\; 2^{n-N}k - 2 \times 2^{n-N-1}k = 0.$$

III.A)2°)d) – $f\big(\frac{1}{2}\big) \;=\; Tf\big(\frac{1}{2}\big) \;=\; \phi_0\big(f(1)\big) \;=\; \phi_0(1) \;=\; i.$
– $f\big(\frac{1}{4}\big) \;=\; Tf\big(\frac{1}{4}\big) \;=\; \phi_0\big(f(\frac{1}{2})\big) \;=\; \phi_0(i) \;=\; 0.$
Avec les notations du **I.A)3°)c)**, $\phi_0 \circ \phi_0$ s'écrit $(h_0 \circ s_0) \circ (s_0 \circ h_0) = h_0 \circ h_0$, donc $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie de centre –1 et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Pour $k \geqslant 3$, on a alors :

$$f\Big(\frac{1}{2^k}\Big) \;=\; Tf\Big(\frac{1}{2^k}\Big) \;=\; \phi_0\Big(f\Big(\frac{1}{2^{k-1}}\Big)\Big) \;=\; \phi_0 \circ \phi_0\Big(f\Big(\frac{1}{2^{k-2}}\Big)\Big) \;=\; -1 + \frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{1}{2^{k-2}}\Big) + 1\Big).$$

Les suites définies par

$$\forall k \geqslant 1, \quad u_k = f\Big(\frac{1}{2^{2k}}\Big) + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 0, \quad v_k = f\Big(\frac{1}{2^{2k+1}}\Big) + 1$$

sont ainsi géométriques de raison $\dfrac{1}{2}$, d'où

$$\forall k \geqslant 1, \quad f\Big(\frac{1}{2^{2k}}\Big) \;=\; -1 + \frac{1}{2^{k-1}}\Big(f\Big(\frac{1}{4}\Big) + 1\Big) \;=\; -1 + \frac{1}{2^{k-1}}$$

et

$$\forall k \geqslant 0, \quad f\Big(\frac{1}{2^{2k+1}}\Big) \;=\; -1 + \frac{1}{2^k}\Big(f\Big(\frac{1}{2}\Big) + 1\Big) \;=\; -1 + \frac{i+1}{2^k}.$$

III.A)3°)a) Si $x \in [0, 1[\cap \mathbb{Z}\big[\frac{1}{2}\big]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $r_n(x) = 0$. Avec les notations de la question **III.A)**, on a $x_p = 0$ pour tout $p \geqslant N$ et en particulier $f(x) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_N}\big(f(0)\big)$. Comme $f(0) \in \tau$ et que τ est stable par chaque ϕ_{r_i}, on en déduit que $f(x) \in \tau$.
Cette propriété reste en outre valable lorsque $x = 1$.

III.A)3°)b) L'ensemble $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (des nombres dits "dyadiques") est dense dans $\mathbb{R}$ donc tout $t \in [0,\,1]$ est limite d'une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,\,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.
Comme $f(t_n) \in \tau$ et que f est continue, $f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)$ appartient à l'adhérence de τ, c'est-à-dire à τ lui-même puisque cet ensemble est fermé.

III.A)4°)a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n est bien défini et appartient à τ.
C'est évident pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$.
– Si $z_{n-1} \in \tau_0$, alors $z_n = \phi_0^{-1}(z_{n-1})$ a un sens car ϕ_0 définit une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et de plus, $z_n \in \tau$ vu que $\phi_0(\tau) = \tau_0$.
– Si $z_{n-1} \in \tau_1$, on montre de même que z_n est bien défini et appartient à τ_1.
La propriété s'ensuit par récurrence.

III.A)4°)b) – L'algorithme du **a)** montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n-1} = \phi_{r_n}(z_n)$, d'où $z_0 = z = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(z_n)$ par une récurrence immédiate.
– Par ailleurs, en posant $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n}$ et $x_p = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n}$, on a $f(x) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}\big(f(x_p)\big)$ selon le **A)1°)b)**.
Il en résulte que pour tout $p \in \mathbb{N}$, z et $f(x)$ appartiennent à l'ensemble noté $\widetilde{\tau}_p$ dans le **I.B)3°)**. Comme $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}^*} \widetilde{\tau}_p$ est réduit à un singleton, on en déduit que $f\big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n}\big) = z$.

III.A)4°)c) En utilisant le fait que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}$ est une valeur approché de x à 2^n près, une fonction retournant une valeur approchée d'un antécédent de z avec une précision de ε est donnée, en langage Maple, par :

```
approx :=proc(z,epsilon)
local(x,n,u)
x:=0:  u:=z:
for n from 1 to int(-ln(epsilon)/ln(2))
      do
        if Re(z)<=0 then z:=(1+I)*(conjugate(z)+(1+I)/2)
        else z:=(1-I)*(conjugate(z)+(-1+I)/2):  x:=x+1/(2^n)
        fi
      od
evalf(x);
end;
```

III.A)5°)a) On remarque que $f\big(1-\frac{1}{4}\big) = -\overline{f\big(\frac{1}{4}\big)}$ donc $f\big(\frac{3}{4}\big) = f\big(\frac{1}{4}\big) = 0$ et f n'est pas injective.

III.A)5°)b) Supposons l'existence d'une bijection continue g de $[0,\,1]$ sur τ et appelons a un sommet de τ différent de $g(0)$ et de $g(1)$. L'ensemble $\tau \backslash \{a\}$ est convexe donc connexe par arcs alors que $[0,\,1] \backslash \{g^{-1}(a)\}$ ne l'est pas, ce qui entraîne que g^{-1} n'est pas continue sur $\tau \setminus \{a\}$. Par caractérisation séquentielle, il existe alors un élément $b \in \tau \setminus \{a\}$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\tau \setminus \{a\}$ de limite b, tels que $g^{-1}(b_n)$ ne tende pas vers $g^{-1}(b)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Quitte à considérer une sous-suite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet de se ramener au cas où $\big(g^{-1}(b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain élément $x \in [0,\,1]$ différent de $g^{-1}(b)$. Comme g est continue, $g\big(g^{-1}(b_n)\big) = b_n$ tend alors vers $g(x)$, ce qui est contradictoire avec le fait que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

III.A)6°)a) – On a déjà vu que $\phi_0 \circ \phi_0(z) = -1 + \frac{1}{2}(z+1)$ et que son unique point fixe est $z = -1$.
De même,
– $\phi_1 \circ \phi_1(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1)$ avec $z = 1$ comme unique point fixe.
– $\phi_1 \circ \phi_0(z) = -\frac{i}{2}(z-1)$ avec $z = \frac{2i+1}{5}$ comme unique point fixe.
– $\phi_0 \circ \phi_1(z) = \frac{i}{2}(z+1)$ avec $z = \frac{2i-1}{5}$ comme unique point fixe.

Géométriquement, $\phi_0\circ\phi_0$ et $\phi_1\circ\phi_1$ correspondent à des homothéties, et $\phi_1\circ\phi_0$ et $\phi_0\circ\phi_1$ à des similitudes directes (plus précisément, $\phi_1\circ\phi_0$ est la similitude directe de centre $\dfrac{2i+1}{5}$, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$).

III.A)6°)b) Le plus expéditif consiste à observer que ϕ est $(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^p$-contractante par composition et que $\mathbb{C}$ est un fermé stable par ϕ : cette application possède alors un unique point fixe d'après le théorème du même nom.

III.A)6°)c) Complétons $r_1, r_2, \ldots, r_p$ en une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ périodique de période p.
Avec les notations du **III.A)1°)b)**, on a alors $x_p = x$ et $f(x) = \phi_{r_1}\circ\cdots\circ\phi_{r_p}\big(f(x_p)\big)$, donc $f(x)$ est un point fixe (et en fait l'unique point fixe) de ϕ.

III.A)6°)d) L'ensemble R des nombres r de la forme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{r_n}{2^n}$ où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique à valeurs dans $\{0,\,1\}$ forme une partie dense de $[0,\,1]$ (en effet, si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x_n}{2^n}$ est le développement dyadique d'un réel x de $[0,\,1]$, et si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite p-périodique telle que $r_1 = x_1, r_2 = x_2, \ldots, r_p = x_p$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{r_n}{2^n}$ est une approximation de x à $\dfrac{1}{2^p}$ près). Montrons que $f(R)$ est dense dans τ.
Soit $z\in\tau$ et $\varepsilon>0$ arbitrairement fixés. Comme f est surjective de $[0,\,1]$ sur τ, notons x un antécédent de z par f. La continuité de f garantit l'existence de $\eta>0$ tel que $\forall y\in\,]x-\eta,\,x+\eta[,\ \ f(y)\in\tau\cap B^0(z,\,\varepsilon)$. Or, par densité de R dans $[0,\,1]$, l'intervalle $]x-\eta,\,x+\eta[$ contient un élément r de R et on a ainsi trouvé un élément $f(r)$ de τ arbitrairement proche de x qui est le point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 ou ϕ_1, ce qui prouve la propriété de densité demandée.

III.B)1°) $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = \dfrac{\beta_n-x}{\beta_n-\alpha_n}\times\dfrac{f(\beta_n)-f(x)}{\beta_n-x} + \dfrac{x-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}\times\dfrac{f(x)-f(\alpha_n)}{x-\alpha_n}$ (en convenant que l'un des deux termes est absent si $\alpha_n = x$ ou $\beta_n = x$).
or $\dfrac{\beta_n-x}{\beta_n-\alpha_n}$ et $\dfrac{x-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}$ sont deux réels positifs de somme 1 donc $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ se présente comme le barycentre affecté de coefficients positifs de deux quantités tendant chacune vers $f'(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = f'(x)$.
Remarque : le résultat devient faux en général si on ne suppose pas l'hypothèse $\alpha_n\leqslant x\leqslant\beta_n$.

III.B)2°)a) D'après le **III.A)1°)b)**,

$$f(\alpha_n) = \phi_{r_1(x)}\circ\cdots\circ\phi_{r_n(x)}\big(f(0)\big) \quad\text{et}\quad f(\beta_n) = \phi_{r_1(x)}\circ\cdots\circ\phi_{r_n(x)}\big(f(1)\big)$$

donc $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = 2^n\times\big(\phi_{r_1(x)}\circ\cdots\circ\phi_{r_n(x)}(1) - \phi_{r_1(x)}\circ\cdots\circ\phi_{r_n(x)}(-1)\big)$.
Chaque application ϕ_{r_i} divisant les distances par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\Big|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\Big| = 2^n\times\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^n\times 2,$$

dont la limite est $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$: f n'est donc pas dérivable au point x selon le **III.B)1°)**.

III.B)2°)b) Si f était dérivable (à gauche) au point 1, elle serait dérivable (à droite) en 0 en vertu de l'égalité $f(x) = -\overline{f(1-x)}$, ce qui est impossible d'après le **III.B)2°)a)**.