Corrigé E3A MP 2012 MATH B

M.SAADAOUI (IBN TAYMIA MARRAKECH)

1. (a) D'après le formule du rang , on a $\dim Ker(\pi) + \dim \operatorname{Im} \pi = \dim E$, d'autre part , pour tout $x \in E$, on a $x = \underbrace{x - \pi(x)}_{\in Ker(\pi)} + \underbrace{\pi(x)}_{\in \operatorname{Im}(\pi)}$, donc $E = Ker(\pi) \oplus \operatorname{Im}(\pi)$.

   i. Soit $x \in E$, on a $x - \pi(x) \in Ker(\pi) = (\operatorname{Im} \pi)^{\perp}$ (Car π est un projecteur orthogonal) , donc d'après le théorème de Pythagore , on a : $\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2$. L'égalité à lieu si et seulement si $x = \pi(x)$ c'est-à-dire si et seulement si $x \in \operatorname{Im}(\pi)$.

   ii. On a $\langle \pi(x), x\rangle = \langle \pi(x), x - \pi(x) + \pi(x)\rangle = \underbrace{\langle \pi(x), x - \pi(x)\rangle}_{=0} + \langle \pi(x), \pi(x)\rangle = \|\pi(x)\|^2 \geq 0$.L'égalité à lieu si et seulement si $\pi(x) = 0$ c'est-à-dire $x \in Ker(\pi)$.

   (b) Soit π un projecteur (donc π^* est aussi un projecteur)

   • Supposons que $\pi = \pi^*$, alors $Ker(\pi) = Ker(\pi^*) = (\operatorname{Im} \pi)^{\perp}$, donc π est orthogonal

   • Supposons que π est orthogonal , alors , pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle x - \pi(x), \pi(y)\rangle = 0$, donc $\langle x, \pi(y)\rangle = \langle \pi(x), \pi(y)\rangle$ et par symétrie , $\langle \pi(x), y\rangle = \langle \pi(x), \pi(y)\rangle$. Par suite $\langle x, \pi(y)\rangle = \langle \pi(x), y\rangle$, donc $\pi = \pi^*$.

2. (a) Si π est un projecteur et $\mathcal{B}$ une base orthonormé , $M = mat_{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $mat_{\mathcal{B}}(\pi^*) = {}^tMM$ étant la matrice d'un projecteur , donc $Tr(M) = 1$, c'est -à-dire $a + d = 1$,π est un projecteur orthogonal si et seulement si ${}^tM = M$ et $M^2 = M$. ce qui est équivalent à : $b = c$ et , $\begin{pmatrix} bc + a^2 & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ce qui est équivalent à $b = c$, $a^2 + b^2 = a$, $(a + d)b = b$ et $c(a + d) = c$ et $b^2 + d^2 = d$ .Les égalités précedentes sont alors équivalentes à $b = c$, $b^2 = a(1 - a)$, $c(a + d) = c$ et $b^2 = d(1 - d)$ cette dérnière est vérifiée $d(1 - d) = (1 - a)a$.

   (b) $a(1 - a) = b^2 \geq 0$, donc $a \in [0, 1]$.

   (c) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Si $a = 0$, alors $b^2 = a(1 - a) = 0$, donc $b = 0$, dans ce cas $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc diagonalisable

   Si $a \neq 0$, $\chi_N = X(X - a)$, est scindé à racines simples , donc N est diagonalisable .

   (d) On a $E = Ker(\pi_1) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(\pi_1)$. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée adaptée à cette décomposition , alors la matrice de $M_1 = mat_{\mathcal{B}}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ étant une base orthonormée , donc , il existe $a \in [0, 1]$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a(1 - a)$ et $M_2 = mat_{\mathcal{B}}(\pi_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 - a \end{pmatrix}$

   $Mat_{\mathcal{B}}(\pi_1 \circ \pi_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (d'après la question précédente) , de plus le spectre de $\pi_1 \circ \pi_2$ est $\{0, a\}$ donc inclu dans $[0, 1]$.

3. (a) π_i étant des projecturs orthogonaux , donc $\pi_i^* = \pi_{i1}^*$,donc

   $$(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1^* \circ \pi_2^* \circ \pi_1^* = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$$

   $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est un endomorphisme symétrique , donc diagonalisable .D'après 1°) $(b).i$, on a

   $$\|(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)(x)\| = \|\pi_1(\pi_2(\pi_1(x)))\| \leq \|\pi_2(\pi_1(x))\| \leq \|\pi_1(x)\| \leq \|x\|$$

   Si λ est une valeur de $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, il existe $x \in E \backslash \{0\}$ tel que $\pi(x) = \lambda x$, donc $|\lambda| \|x\| \leq \|x\|$. D'autre part , Par suite $\lambda \in [-1, 1]$.

(b) $\langle x, \pi(x)\rangle = \langle \pi_1(x), \pi_2(\pi_1(x))\rangle \geq 0$ (d'après $\mathbf{1}°)(b).ii)$, donc π est positif par suite son spectre est contenu dans $[0,1]$.

(c) π_1 et $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ commutent , donc $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.

(d) On a $\pi_1(E) \subset E$, donc $\pi_1 \circ \pi_2(\pi_1(E)) \subset \pi_1(E)$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2$. On a pour tout $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)$, $\pi_1(x) = x$, donc $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x)$. Ainsi sur $\mathrm{Im}\,\pi_1$, on a $\pi_{/\,\mathrm{Im}(\pi_1)} = (\pi_1 \circ \pi_2)_{/\,\mathrm{Im}(\pi_1)}$.

D'autre part π est diagonalisable et $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par π , donc $\pi_{/\,\mathrm{Im}(\pi_1)} = (\pi_1 \circ \pi_2)_{/\,\mathrm{Im}(\pi_1)}$ est diagonalisable , et puisque le spectre de $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\,\mathrm{Im}(\pi_1)}$ est inclu dans le spectre de π , donc le spectre de $(\pi_1 \circ \pi_2)_{/\,\mathrm{Im}(\pi_1)}$ est inclu dans $[0,1]$.

(e) On a $\pi_i^* = \pi_i$, donc

$$G^{\perp} = (\mathrm{Im}(\pi_1) + Ker(\pi_2))^{\perp} = \mathrm{Im}(\pi_1)^{\perp} \cap Ker(\pi_2)^{\perp} = Ker(\pi_1^*) \cap \mathrm{Im}\,\pi_2^* = Ker(\pi_1) \cap \mathrm{Im}\,\pi_2$$

Pour $x \in G^{\perp}$, $\pi_2$étant un projecteur , donc , pour tout $x \in \mathrm{Im}(\pi_2)$, $\pi_2(x) = 0$,ce qui donne que : $(\pi_1 \circ \pi_2)(x) = \pi_1(x) = 0$ (car $x \in G^{\perp} = Ker(\pi_1) \cap \mathrm{Im}\,\pi_2)$.

(f) Soit $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{r_2})$ une base orthonormée de $\mathrm{Im}(\pi_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_{r_2+1}, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $Ker(\pi_2)$, $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de E , et on a $\pi_2(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ pour $i \in \{1, 2, ..., r_2\}$ et $\pi_2(\varepsilon_i) = 0$ pour $r_2 < i \leq n$, donc :

$$Tr(\pi_2 \circ \pi_1) = \sum_{i=1}^{n} \langle (\pi_2 \circ \pi_1)(\varepsilon_i), \varepsilon_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi_1(\varepsilon_i), \pi_2^*(\varepsilon_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi_1(\varepsilon_i), \pi_2(\varepsilon_i)\rangle = \sum_{i=1}^{r_2} \langle \pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i\rangle$$

D'autre part , on a $\|\pi_i(x)\| \leq \|x\|$, donc

$$\langle \pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i\rangle \leq \|\pi_1(\varepsilon_i)\| \, \|\varepsilon_i\| \leq 1$$

Par suite $Tr(\pi_2 \circ \pi_1) \leq r_2$.

Si l'égalité à lieu , alors , pour tout $i \in \{1, 2, ..., r_2\}$, $(\pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i) = 1 = \|\varepsilon_i\|$, donc d'après la question $\mathbf{1}°)(b)$ .on a $\varepsilon_i \in \mathrm{Im}(\pi_1)$ pour $i \in \{1, 2, ..., r_2\}$, par suite $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1)$

Réciproquement si $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1)$ alors $Tr(\pi_2 \circ \pi_1) = \sum_{i=1}^{r_2} \langle \pi_1(\varepsilon_i), \varepsilon_i\rangle = \sum_{i=1}^{r_2} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle = r_2$

Exercice II

1. (a) $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,0_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & E \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AE + B \\ C & CE + D \end{pmatrix}$

   (b) On prend $E = -A^{-1}B$, donc $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$

   Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ étant triangulaires par blocs , donc

$$\det \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = 1 \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \det(A) \times \det\left(D - CA^{-1}B\right)$$

   Ce qui donne que $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B)$.

2. (a) D'après la question précedente , on a $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-}$. D'autre part $AC = CA$, donc $\det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB)$

(b) i. On a $\chi_{M_{A,B,C,D}} = \det\begin{pmatrix} A-\lambda I_n & B \\ C & D-\lambda I_n \end{pmatrix}$. Notons $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ les valeurs propres de A , on a pour tout $\lambda \notin Sp(A)$, $A-\lambda I_n$ est inversible de plus $A-\lambda I_n$ et C commutent , donc d'après la question précedente , on a : $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} A-\lambda I_n & B \\ C & D-\lambda I_n \end{pmatrix} = \det[(A-\lambda I_n)(D-\lambda I_n) - CB] = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ Où $V = AD-CB$ et $U = -(A+D)$. D'autre part $\lambda \mapsto \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) - \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ est une fonction polynôme qui admet une infinité de racine , donc nulle , par suite , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$$

ii. Pour $\lambda = 0$, on obtient $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(V) = \det(AD-CB)$.

3. $S = \begin{pmatrix} I_n & B \\ {}^tB & I_n \end{pmatrix}$

(a) ${}^t({}^tB\ B) = {}^tB\ {}^t({}^tB) = {}^tB\ B$ et $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tXSX = \|BX\|^2 \geq 0$. S étant symétrique réelle positive , donc ses valeurs propres sont toutes réelles ou positives .

(b) D'après la question précédente , on a :

$$\chi_S = \det\left(\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) I_n - {}^tBB\right) = \det\left({}^tBB - (\lambda-1)^2 I_n\right) = \chi_{\,{}^tBB}\left((\lambda-1)^2\right)$$

(c) Supposons que T est définie positive , soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre associée à T et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $TX = \lambda X$, On a ${}^tXTX > 0$, donc $\lambda \|X\|^2 > 0$, ce qui donne que $\lambda > 0$.
Supposons que les valeurs propres de T sont toutes strictement positive .T étant symétrique , donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ diagonale telle que ${}^tPTP = D$.
On a alors , pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,posons $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Y \neq 0$ car $X \neq 0$.
${}^tXTX = ({}^tXP)\,D\,({}^tPX) = {}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 > 0$.

(d) On a S est symétrique positive ,notons $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ les valeurs propres de ${}^tBB$, (on a $\mu_i \geq 0$ car ${}^tBB$ est symétrique positive).
alors : λ est une valeur propre de $S \Leftrightarrow \chi_S(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\,{}^tBB}\left((\lambda-1)^2\right) \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \in \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$ ce qui est équivalent à $\lambda \in \left\{1+\sqrt{\mu_1}, ..., 1+\sqrt{\mu_n}, 1-\sqrt{\mu_1}, ..., 1-\sqrt{\mu_n}\right\}$
Donc $Sp(S) = \left\{1+\sqrt{\mu_1}, ..., 1+\sqrt{\mu_n}, 1-\sqrt{\mu_1}, ..., 1-\sqrt{\mu_n}\right\}$.
Ainsi S est définie positive si et seulement si son spectre est inclu dans $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est équivalent à , pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sqrt{\mu_i} < 1$ c'est-à-dire $0 \leq \mu_i < 1$.

4. Remarquons d'abord que A_n est une matrice de taille 2^{n+1} , $n \geq 1$. D'après la question **2°**) , on a $\det(A_n) = \det(-3A_{n-1}) = (-3)^{2^n} \det(A_{n-1}) = 3^{2^n} \det(A_{n-1})$. Par récurrence $\det(A_n) \neq 0$.

(a) On a $\dfrac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} = 3^{2^k}$, donc $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}\right) = \prod_{k=2}^{n} 3^{2^k} = 3^{2^2+...+2^n}$, donc

$$\det(A_n) = 3^{2^2+...+2^n} \det(A_2) = -3^{2+2^2+...+2^n} = -3^{2^{n+1}-2^n}$$

(b) D'après la question **2°**), on a :

$$\chi_{A_n} = \det\left(\lambda^2 I_{2^n} - 3A_{n-1}^2\right) = \det\left(3A_{n-1}^2 - \lambda^2 I_{2^n}\right) = 3^{2^{n+1}} \det\left(A_{n-1}^2 - \frac{\lambda^2}{3} I_{2^n}\right)$$

Donc $\chi_{A_n} = 3^{2^{n+1}} \det\left(A_{n-1} - \frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^n}\right) \times \det\left(A_{n-1} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_{2^n}\right) = 3^{2^n} \chi_{A_n}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right) \times \chi_{A_n}\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)$

λ est une valeur propre de A_n si et seulement si $\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ est une valeur propre de A_{n-1} .

Les valeurs propres de A_1 sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, donc les valeurs propres de A_2 sont $-3, 3$, puis par récurrénce les valeurs propres de A_n sont $\left(\sqrt{3}\right)^n, -\left(\sqrt{3}\right)^n$.

Exercice III

1. (a) OB diamètre du cercle $\mathcal{C}$, donc (ON_tB) est rectangle en N_t .

   (b) $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ étant le centre du cercle et $R = \frac{1}{2}$ est le rayon du cercle $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ pour équation :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ , soit } x^2 - x + y^2 = 0$$

   $\mathcal{D}'$ à pour équation $y = 1$.

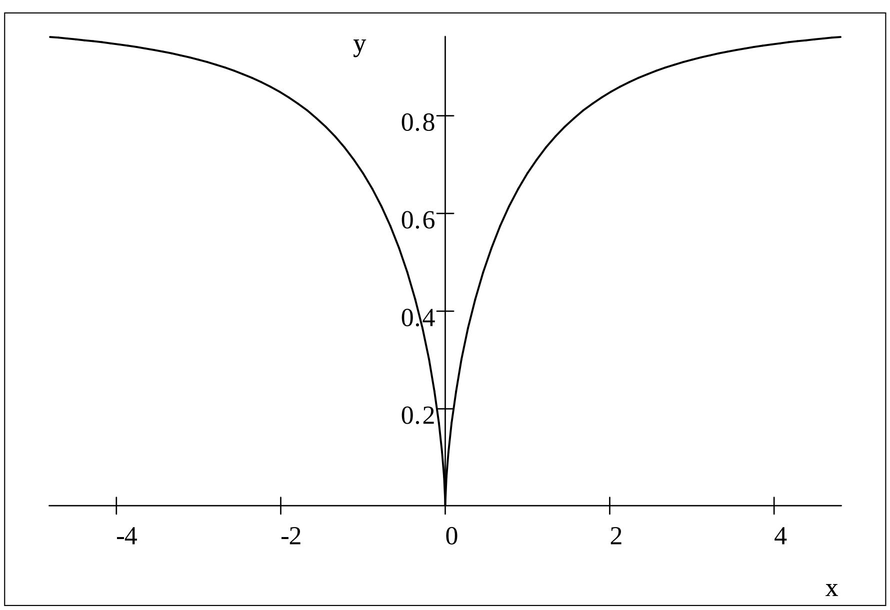
   (c) Notons (x, y) les coordonnées de N_t , on a alors $M_t = (t, 1)$, l'équation de la droite (OM_t) est $y = \frac{1}{t}x$. $N_t \in (OM_t)$, donc $y = \frac{x}{t}$. D'autre part $N_t \in \mathcal{C}$, donc $x^2 - \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} = 0$, ce qui donne que $x = \frac{t}{1+t^2}$ puis $y = \frac{1}{1+t^2}$.

   (d) $\overrightarrow{N_tM_t} = \left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$.

2. (a) $x(t) = \frac{t^3}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

   On a $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$, donc $y = 1$ est asymptote à la courbe Γ .

   $\left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$



(b) $P_t = \left(x(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}, y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \right)$, on a $x(t) = t^3 + o(t^3)$ et $y(t) = t^2 + o(t^3)$, donc $\overrightarrow{OP_t} = t^2 V_1 + t^3 V_2 + o(t^3)$ où $V_1 = (0,1)$ et $V_2 = (1,0)$. O est donc un point de rebroussement de première espèce .

(c) Pour $t \geq 0$, la partie de la courbe définie par : $x(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}, y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ admet pour équation cartésienne : $x = y\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ $0 \leq y < 1$, (En effet $y = \dfrac{t^2}{t^2+1}$ donne que $t = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$, donc $x = ty = y\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$) . Ainsi la domaine D dont on veut calculer l'aire est défini par :

$$0 \leq y < 1 \text{ et } 0 \leq x \leq y\sqrt{\frac{y}{1-y}} = \varphi(y)$$

L'aire cherchée est alors égale à $\mathcal{A}(D) = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{\varphi(y)} dxdy = \int_0^1 y\sqrt{\frac{y}{1-y}}dy$. Posons $t = \sqrt{\dfrac{y}{1-1}}$,donc $y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dy = \dfrac{2t\ dt}{(1+t^2)^2}$, donc $\mathcal{A}(D) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t^4\ dt}{(1+t^2)^4} = \frac{\pi}{16}\pi$

3. (a) On a $z' = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$, donc $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2}$, ce qui donne que $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM} = 1$.

(b) On a $U_t = \sigma(P_t)$ donc $\overrightarrow{OU_t} = \dfrac{\overrightarrow{OP_t}}{\left\|\overrightarrow{OP_t}\right\|^2} = (t,1) = M_t$.

(c) L'image de Γ par σ est $\mathcal{D}'$.