Exercice n° 1

1°) $P_f(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ -12 & -4 & -9-X \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} = -(X+1) \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{C_2 \leftarrow C_2-C_3}{=} -(X+1) \begin{vmatrix} 5-X & -2 & 4 \\ 12 & -5-X & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(X+1)\big((X-5)(X+5)+24\big) = -(X+1)(X^2-1).$

$P_g(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -2 \\ 0 & -3-X & -2 \\ 0 & 4 & 3-X \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X+3 & 2 \\ 4 & 3-X \end{vmatrix} = (X+1)\big(-X^2+9-8\big) = -(X+1)(X^2-1).$

Les polynômes caractéristiques de f et g sont tous deux égaux à $-(X-1)(X+1)^2$; Les valeurs propres de f et g sont 1 (simple) et -1 (double).

2°) On désigne par F_λ (resp. G_λ) le sous-espace propre de l'endomorphisme f (resp. g) correspondant à la valeur propre λ.

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ -12 & -4 & -8 \end{pmatrix}$ est de rang 1; $A - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \\ -12 & -4 & -10 \end{pmatrix}$ est de rang 2;

$B + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1; $B - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 2;

Les colonnes de $A + I_3$ (respectivement $B + I_3$) vérifient $C_1 = 3C_2$ et $2C_2 = C_3$ (respectivement $C_1 = 0$ et $C_2 = C_3$) donc $F_{-1} = \text{Vect}\big((1,-3,0),(0,2,-1)\big)$ et $G_{-1} = \text{Vect}\,((1,0,0),(0,1,-1))$.

Les colonnes de $A-I_3$ (respectivement $B-I_3$) vérifient $C_1+2C_2+2C_3 = 0$ (respectivement $C_1+C_2-2C_3 = 0$) donc $F_1 = \text{Vect}\,(1,2,2)$ et $G_1 = \text{Vect}\,(1,1,-2)$

L'équation du plan $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}) = 0$.

On trouve qu'une équation de F_{-1} est $3x+y+2z = 0$, et qu'une équation de G_{-1} est $y+z = 0$; Des équations de F_1 (respectivement G_1) sont $\begin{cases} 2x-y = 0 \\ y+z=0 \end{cases}$ (resp. $\begin{cases} x-3y = 0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

3°) $F_{-1} \cap G_{-1}$ est une droite d'équations $\begin{cases} 3x+y+2z = 0 \\ y+z=0 \end{cases}$, dirigée par $(1,3,-3)$; De plus, $F_1 \subset G_{-1}$ et $G_1 \subset F_{-1}$.

Donc $\big((1,1,-2),(1,3,-3),(1,2,-2)\big) \in F_{-1} \times F_{-1} \times F_1 \cup G_1 \times G_{-1} \times G_{-1}$ est une base formée de vecteurs propres communs à f et g.

4°) On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, l'inverse de P trouvé par la méthode de Gauß est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 2

1°) Montrons par récurrence double que H_n :($a_n \leqslant n^2$ pour $n \geqslant 1$)

C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$:

Si H_n et H_{n-1} sont vrais, alors $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}\leqslant\dfrac{2}{n+1}(n-1)^2$; or $\dfrac{2}{n+1}(n-1)^2-(2n+1)=\dfrac{1}{n+1}\big(2n^2-4n+2-(2n+1)(n+1)\big)=\dfrac{1-7n}{n+1}\leqslant n$ pour $n\geqslant 1$.

Donc $a_{n+1}-a_n\leqslant 2n+1$, et $a_{n+1}\leqslant n^2+(2n+1)\leqslant(n+1)^2$ ce qui établit H_{n+1}, et donc H_n est vraie pour tout $n\geqslant$ par récurrence double.

Puisque $a_n\geqslant 1$, $|z|>1\Rightarrow\sum|z|^n$ diverge $\Rightarrow\sum a_n|z|^n$ diverge et donc $R\leqslant 1$.

Puisque $a_n\leqslant 1$, $|z|<1\Rightarrow\sum n^2|z|^n$ converge $\Rightarrow\sum a_n|z|^n$ converge et donc $R\geqslant 1$.

Finalement $\boxed{R=1}$.

2°) $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$ et donc $a_{n+1}x^{n+1}-a_nx^{n+1}=\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}$. Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=S(x)-x$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=x.\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^nx.S(x)$ et $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-11}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}=2x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=2x(1+S(x))$

donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1-x)S(x)-x\big)=2x(1+S(x))$, soit $(1-x)S'(x)-S(x)-1=2x(1+S(x))$ c'est-à-dire $\boxed{(E):(1-x)S'(x)-(1+2x)S(x)=(1+2x)}$

3°) -1 est clairement solution de l'équation complète ; Résolvons l'équation sans second membre : (E_0) : $(1-x)S'(x)=(2x+1)S(x)$ sur $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

$\dfrac{y'}{y}=(\ln|y|)'=\dfrac{2x+1}{1-x}=-2+\dfrac{3}{1-x}$ donne $\ln|y|=-2x-3\ln(1-x)+cte$, donc $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}$ est une solution de (E_0).

Les solutions de (E) sur $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ sont $x\mapsto -1+\lambda.\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

Avec $\lambda=1$, on obtient $y(0)=0$ sur $]-\infty,1[$, soit par unicité de la solution du problème de Cauchy : $\boxed{S(x)=-1+\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}\text{ sur }]-1,1[}$.

4°) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}=+\infty$, donc Pour que $x\mapsto -1+\lambda.\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}$ $\lambda\in\mathbb{R}$, il faut que $\lambda=0$. La seule solution de (E) définie en 1 est la constante -1.

Exercice n° 3

1°) Puisque $y(t)^2=t^2=2p.\dfrac{t^2}{2p}=2p.x(t)$, $\mathcal{P}$ vérifie l'équation cartésienne $y^2=2p.x$; C'est une parabole d'axe O_x, et de coefficient p.

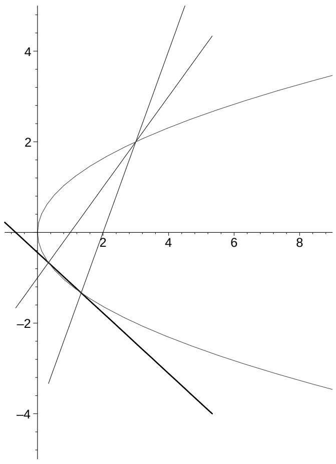


figure 1

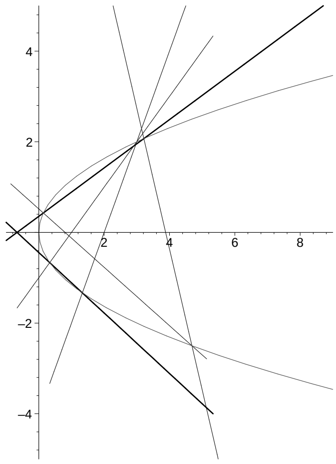


figure 2

2°) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t}{p}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ est orthogonal à la normale ; Appelons cette normale $\mathcal{N}(t)$.

$N : (X,Y) \in \mathcal{N}(t)$ ssi $\overrightarrow{ON}.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}(t).\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$, donc ssi $\boxed{\dfrac{t}{p}X + Y = \dfrac{t}{p}\dfrac{t^2}{2p} + t = t + \dfrac{t^3}{2p^3}}$.

3°) $M(\theta) \in \mathcal{N}(t)$ ssi $\dfrac{t}{p}\dfrac{\theta^2}{2p} + \theta = t + \dfrac{t^3}{2p^3}$, c'est-à-dire $\dfrac{t}{2p^2}(\theta^2 - t^2) + (\theta - t) = 0$, donc $\dfrac{\theta - t}{2p^2}\big(t(t+\theta) + 2p^2\big) = 0$, ce qui se ramène à $t^2 + t\theta + 2p^2 = 0$, puisque $t \neq \theta$.

Le nombre de points répondant aux conditions de l'énoncé correspond aux nombres de racines de ce trinôme de déterminant $\Delta = \theta^2 - 8p^2$, soit $\left\{\begin{array}{lll} 2 \text{ points} & \text{si} & |\theta| > \sqrt{8}p \\ 1 \text{ point} & \text{si} & \theta = \pm\sqrt{8}p \\ 0 \text{ point} & \text{si} & |\theta| < \sqrt{8}p \end{array}\right.$ *(cf. figure 1)*

4°) Si $|\theta| > \sqrt{8}p$, soient t_1 et t_2 les deux racines du trinôme $t^2 + t\theta + 2p^2$: $t_1 > t_2$ et $t_1.t_2 = 2p^2$.

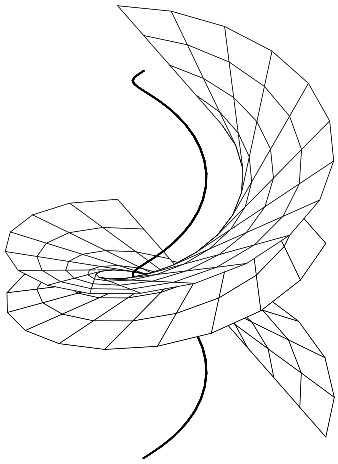
La droite $\big(M(t_1), M(t_2)\big)$ a pour équation : $\begin{vmatrix} X & \dfrac{t_1^2}{2p} & \dfrac{t_1^2}{2p} \\ Y & t_1 & t_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ soit, après développement par rapport à la première colonne : $(2pX)(t_1 - t_2) - Y(t_1^2 - t_2^2) + t_1t_2.(t_1 - t_2) = 0$, et par simplification par $t_1 - t_2$: $2pX - (t_1 + t_2)Y + 2p^2 = 0$ (car $t_1.t_2 = 2p^2$) , équation vérifiée par le point de coordonnées $\boxed{(X,Y) = (\dfrac{-1}{2p}, 0)}$ pour toutes valeurs de t_1 et t_2. *(cf. figure 2)*

Exercice n° 4

Soit $\overrightarrow{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$; alors $\overrightarrow{OM} = a.\overrightarrow{p}(t) + u.\overrightarrow{v}(t)$, donc $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial t} = a.\overrightarrow{p}'(t) + u.\overrightarrow{\alpha}'(t) = a.\overrightarrow{\alpha}(t) + u.\overrightarrow{\alpha}'(t)$ et

1°) $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u} = \overrightarrow{v}(t)$. La normale à la surface $\mathcal{C}$ en $M(t,u)$ est donc dirigée par $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial t} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u} = -u\overrightarrow{v}'(t) \wedge \overrightarrow{v}(t) = u(-\sin t\,\overrightarrow{\imath} + \cos t\,\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k})$, qui ne s'annule que si $u = 0$;

$M(t,u)$ est régulier si $u \neq 0$, et alors le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(t,u)$ a pour équation $-\sin t.X + \cos t.Y + Z = -\sin t.(a\cos t - u\sin t) + \cos t.(a\sin t + u\cos t) + at + u$,c'est-à-dire $\boxed{-\sin t.X + \cos t.Y + Z = at}$



$\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ ↗

2°) $\underline{\mathcal{S} \text{ est réglée}}$ car engendrée par les droites $(P(t), \overrightarrow{v}(t))$ où $\overrightarrow{OP}(t) = a.\overrightarrow{p}(t)$.

L'équation du plan tangent en $M(t,u)$ à $\mathcal{S}$ ne dépend pas de u, donc $\underline{\mathcal{S} \text{ est développable}}$.

3°) Soit $N(t)$ le point défini par $\overrightarrow{ON}(t) = \cos t\,\overrightarrow{\imath} + \sin t\,\overrightarrow{\jmath} + at\,\overrightarrow{k}$; alors $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\sin t\,\overrightarrow{\imath} + \cos t\,\overrightarrow{\jmath} + a\,\overrightarrow{k}$.

Le point courant de la tangente à $\mathcal{C}$ en $N(t)$ est $T(t,\lambda) : (-\lambda\sin t + \cos t, \lambda\cos t + \sin t, \lambda a + at)$; $T(t, \dfrac{u}{a})$ est l'image de $M(t,u)$ par une homothétie de centre O et de rayon $\dfrac{1}{a}$.

$\mathcal{S}$ n'est pas engendrée par les tangentes à $\mathcal{C}$, sauf si $a = 1$.

4°) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}t} = -\sin t\,\overrightarrow{\imath} + \cos t\,\overrightarrow{\jmath} + a\,\overrightarrow{k}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}t^2} = -\cos t\,\overrightarrow{\imath} - \sin t\,\overrightarrow{\jmath}$, donc l'équation du plan osculateur à $\mathcal{C}$ est $\begin{vmatrix} a & b & c \\ X - \cos t & \cos t & -\sin t \\ Y - \sin t & \sin t & \cos t \\ Z - at & a & 0 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire : $a\sin tX - a\cos tY + Z = a\sin t\cos t - a\cos t\sin t + at = at$;

On retrouve l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(t, u)$.