Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Corrigé de l'épreuve

Banque PT: MATHS I-B.

Préliminaires

1°) Soit E un espace vectoriel sur K et $x_1,...,x_n$, n éléments de E. Ils forment une famille libre de E si l'équation dans $K^n : \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ n'admet que la solution $(0,0,...,0)$, autrement dit : $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

2°) • Dans $\mathscr{F}(\mathbf{R})$ soit la famille $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto x \\ f_2 : x \mapsto x^2 \\ f_3 : x \mapsto x^3 \end{cases}$, cette famille est libre.

En effet, soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^4$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ fonction nulle sur R.
Alors , $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$ et le polynome $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$ aurait donc une infinité de racines. C'est le polynome nul et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ cqfd.

• Dans $\mathscr{F}(\mathbf{R})$ soit la famille $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto \cos x \\ f_2 : x \mapsto \cos 2x \\ f_3 : x \mapsto \cos^2 x \end{cases}$, cette famille est liée.

En effet on a $f_2 - 2f_3 + f_0 = 0$.

• Dans $\mathscr{F}(\mathbf{R})$ soit la famille $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto x^3 + 1 \\ f_2 : x \mapsto |x^3| \end{cases}$, cette famille est libre.

En effet, soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ fonction nulle sur R.
Alors, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lambda_0 + \lambda_1 (x^3 + 1) + \lambda_2 |x^3| = 0$ et donc on en déduit que:

$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 0 \quad (x = 0) \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (x = 1) \\ \lambda_0 + \lambda_2 = 0 \quad (x = -1) \end{cases}$ d'où $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_0 = 0$ et enfin $\lambda_2 = 0$. cqfd.

3°) Les dimensions des sous espaces engendrés par ces familles sont:
<u>cas 1</u> : $dim = 4$; <u>cas 2</u> : $dim = 3$; <u>cas 3</u> : $dim = 3$

Partie I

1°) Pour montrer que $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, on prouve que c' est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1,1])$. Or en effet, soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{G}$ et λ_1 et λ_2 deux réels, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est de classe C^2 sur $[-1,1]$ comme somme de deux fonctions ayant cette propriété, et si on note p_1, q_1 et p_2, q_2 les fonctions polynomes de degré inférieur ou égal à trois, restrictions de f_1, (resp f_2) à $[-1,0[$, (resp $]0,1]$), alors les restrictions de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ à $[-1,0[$,
(resp $]0,1]$), sont $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, (resp $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$) qui sont des fonctions polynomes de degré inférieur ou égal à trois et par suite $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est élément de $\mathcal{G}$. cqfd.

2°) Soit f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x + \delta_1 & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ f est élément de $\mathcal{G}$ à condition que f soit continue en 0, dérivable en 0 et admette une dérivée seconde en 0.
D' où $\delta_1 = \delta_2$ (continuité), $\gamma_1 = \gamma_2$ (dérivabilité), $\beta_1 = \beta_2$ (dérivée seconde). Une fonction f de $\mathcal{G}$ dépend donc de 5 paramètres, $\mathcal{G}$ est donc de dimension 5. On le verra plus précisément à la question suivante.

3°) Les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 sont celles définies dans le cas 1 des préliminaires (en restreignant leur domaine de définition à $[-1,1]$).

La fonction f_4 est définie par $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Il est clair que f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 appartiennent à $\mathcal{G}$.

- Montrons que cette famille est libre.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^5$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$ fonction nulle sur $[-1,1]$, alors :
  $\forall x \in [-1,0[,\ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$ et le polynome $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$ aurait donc une infinité de racines. C' est le polynome nul et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Par suite pour $x = 1$ il reste $\lambda_4 = 0$ et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, cqfd.
- Montrons que cette famille est génératrice.
  Soit f un élément de $\mathcal{G}$, alors $f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et on peut écrire :
  $f = \delta f_0 + \gamma f_1 + \beta f_2 + \alpha_1 f_3 + (\alpha_2 - \alpha_1) f_4$ ce qui exprime que f s' exprime comme combinaison linéaire des f_i, cqfd.

La dimension de $\mathcal{G}$ est donc bien égale à 5.

Partie II

1°) Par un raisonnement analogue à celui de I1, S_{σ_n} est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ car c' est un sous espace de $\mathscr{F}([x_0, x_n])$.

2°) La dimension de S_{σ_1} est 4 car S_{σ_1} est en fait l' ensemble des fonctions polynomes définies sur $[x_0, x_1]$ de degré ≤ 3.

3°) a) On suppose que S_{σ_n} est de dimension d et que $(f_1, ..., f_n)$ en constitue une base.

Soit $f \in S_{\sigma_{n+1}}$. La restriction de f à $[x_0, x_n]$ est un élément de S_{σ_n} et donc il existe un unique d-uplet de réels $(a_1, ...a_d)$ tel que $f_{/[x_0, x_n]} = a_1 f_1 + ...a_d f_d$, c' est à dire tel que

$\forall x \in [x_0, x_n], \quad f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i(x)$.

---

b) Soit p_i la fonction polynome (définie sur $\mathbf{R}$ à priori) de degré inférieur ou égal à 3 telle que $\forall x \in]x_{n-1}, x_n[, \ f_i(x) = p_i(x)$ (ceci pour éviter les confusions entre polynome, fonction polynome associée et restriction d' une telle fonction à divers intervalles).

Il est dommage que le texte parle de $f_{i/]x_{n-1}, x_n[} = p_i$ *ce qui définit* p_i *comme fonction polynome*
avec pour domaine de définition $]x_{n-1}, x_n[$ *et qu' ensuite on parle de* $p_i(x)$ *pour* $x \in [x_n, x_{n+1}]$. Bon ceci n' est pas dramatique!

Soit enfin les fonctions $\tilde{f}_i$ définies par : $\forall i \leq d$, $\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in [x_0, x_n] \\ p_i(x) & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases}$

$$\tilde{f}_{d+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_0, x_n] \\ (x - x_n)^3 & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases}$$

et $F = f - \sum_{i=1}^{d} a_i \tilde{f}_i$.

Mais alors $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $\quad F(x) = \alpha_n x^3 + \beta_n x^2 + \gamma_n x + \delta_n - \sum_{i=1}^{d} a_i p_i(x)$ et la restriction de F à $[x_n, x_{n+1}]$ est donc bien une fonction polynome de degré ≤ 3. De plus:

- La continuité de f en x_n se traduit par $\lim_{x \to x_n^+} f(x) = \lim_{x \to x_n^-} f(x)$ soit :

$$\alpha_n x_n^3 + \beta_n x_n^2 + \gamma_n x_n + \delta_n = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i(x_n) = \sum_{i=1}^{d} a_i p_i(x_n) \quad \text{et donc } F(x_n) = 0.$$

- La dérivabilité de f en x_n se traduit par $\lim_{x \to x_n^+} f'(x) = \lim_{x \to x_n^-} f'(x)$ soit :

$$3\alpha_n x_n^2 + 2\beta_n x_n + \gamma_n = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i^{'}(x_n) = \sum_{i=1}^{d} a_i p_i^{'}(x_n) \quad \text{et donc } F'(x_n) = 0.$$

- L' existence de la dérivée seconde de$f$ en x_n se traduit par $\lim_{x \to x_n^+} f''(x) = \lim_{x \to x_n^-} f''(x)$ soit :

$$6\alpha_n x_n + 2\beta_n = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i^{''}(x_n) = \sum_{i=1}^{d} a_i p_i^{''}(x_n) \quad \text{et donc } F''(x_n) = 0.$$

---

c) Montrons que $(\tilde{f}_1,...,\tilde{f}_{d+1})$ est une base de $S_{\sigma_{n+1}}$.

- Montrons que cette famille est libre.
  Soit $(\lambda_1,...,\lambda_{d+1})\in \mathbf{R}^{d+1}$ tel que $\lambda_1\tilde{f}_1+...+\lambda_{d+1}\tilde{f}_{d+1}=0$ fonction nulle sur $[x_0,x_{n+1}]$, alors c' est en particulier la fonction nulle sur $[x_0,x_n]$ et donc $\lambda_1 f_1+...+\lambda_d f_d=0$ sur $[x_0,x_n]$ ce qui implique que $\lambda_1=...=\lambda_d=0$ et par suite $\lambda_{d+1}=0$. cqfd.
- Montrons que cette famille est génératrice.
  Soit $f\in S_{\sigma_{n+1}}$, notons $f_{/[x_0,x_n]}=\sum_{i=1}^{d} a_i f_i$, on peut alors écrire :

$$f=\left(f-\sum_{i=1}^{d}a_i\tilde{f}_i\right)+\sum_{i=1}^{d}a_i\tilde{f}_i$$ et on a $\left(f-\sum_{i=1}^{d}a_i\tilde{f}_i\right)$ est la fonction nulle sur $[x_0,x_n]$.

C' est une fonction polynome de degré≤ 3 sur $[x_n,x_{n+1}]$ qui s' annule, ainsi que ses deux premières dérivées au point x_n, elle vaut donc sur ce dernier intervalle $a_d(x-x_n)^3$ et

finalement on peut écrire $f=\sum_{i=1}^{d+1}a_i\tilde{f}_i$ cqfd.

---

d) On a donc la relation $dim(S_{\sigma_{n+1}})=dim(S_{\sigma_n})+1$, et comme $dim(S_{\sigma_1})=4$ on a :

$$dim(S_{\sigma_n})=n+3$$

4°) a) Un polynome p s' écrit de manière unique, au moyen de la formule de Taylor sous la forme :

$$p(X)=p(a)+p'(a)(X-a)+\frac{p''(a)}{2}(X-a)^2+\frac{p'''(a)}{6}(X-a)^3$$ et par conséquent le

polynome cherché s' écrit $p(X)=\alpha+\beta(X-a)+\frac{\gamma}{2}(X-a)^2+K(X-a)^3$ et la relation

$p(b)=\delta$ fournit $K=\dfrac{\delta-\alpha-\beta(b-a)-\frac{\gamma}{2}(b-a)^2}{(b-a)^3}$ ce qui assure l' existence et l' unicité du polynome cherché.

---

b) Soit $(y_0,...,y_n,\alpha,\beta)$ un $n+3$-uplet de réels fixé.

Cas $n=1$. S_{σ_1} est constitué de fonctions polynomes de degré ≤ 3 et le problème consiste donc à trouver p tel que

$$p(x_0)=y_0\ ;\quad p'(x_0)=\alpha\ ;\quad p''(x_0)=\beta\ ;\quad p(x_1)=y_1$$

C' est exactement le problème résolu au a) précédent.

Hypothèse de récurrence: On suppose qu' étant donné $(y_0,...,y_n,\alpha,\beta)$ un $n+3$-uplet de réels fixé, il existe une unique fonction $f\in S_{\sigma_n}$ telle que :

$\forall i \in \{0,...,n\}\ f(x_i) = y_i$; $f'(x_0) = \alpha$; $f''(x_0) = \beta$.

Soit alors $(y_0,...,y_{n+1},\alpha,\beta)$ un $n+4$-uplet de réels fixé.

Soit alors $f \in S_{\sigma_n}$ associé de manière unique à $(y_0,...,y_n,\alpha,\beta)$, alors $f = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i$.

Cherchons a_{d+1} tel que $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \tilde{f}_i$ réponde à la question.

$\forall i \in \{0,...,n\}$, $\tilde{f}(x_i) = y_i$; $\tilde{f}'(x_0) = \alpha$; $\tilde{f}''(x_0) = \beta$ sont vérifiées, car on a :

$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) = y_i$; $\tilde{f}'(x_0) = f'(x_0) = \alpha$; $\tilde{f}''(x_0) = f''(x_0) = \beta$.

Il reste à utiliser la relation $\tilde{f}(x_{n+1}) = y_{n+1}$ qui se traduit par

$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{d} a_i p_i(x_{n+1}) + a_{d+1}(x_{n+1} - x_n)^3$ et qui fournit $a_{d+1} = \dfrac{y_{n+1} - \sum_{i=1}^{d} a_i p_i(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_n)^3}$. D' où l' existence de $\tilde{f}$ répondant à la question.

Prouvons maintenant l' unicité de cette solution. Soit f une solution, alors sa restriction à $[x_0, x_n]$ répond au problème associé à $(y_0,...,y_n,\alpha,\beta)$. $f_{/[x_0,x_n]} = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i$ est donc unique, et le calcul précédent donnant l' unicité de a_{d+1} assure l' unicité de f .

---

c) $S^0_{\sigma_n}$ est un sous espace vectoriel de S_{σ_n} de manière évidente. Dès lors l' application $\hat{\Phi}$ définie par : $\begin{array}{llll} \hat{\Phi}: & \mathbf{R}^2 & \to S^0_{\sigma_n} \\ & (\alpha,\beta) & \mapsto f \end{array}$ où f est l' unique solution du problème précédent pour $(0,...,0,\alpha,\beta)$ est un isomorphisme d' espaces vectoriels, ce qui fait que $dim(S^0_{\sigma_n}) = 2$.

En effet : • $\hat{\Phi}$ <u>est linéaire</u>:

Soit (α_1,β_1) et (α_2,β_2) deux éléments de $\mathbf{R}^2$ d' image par Φ, f_1 et f_2.

$f = \hat{\Phi}(\lambda_1(\alpha_1,\beta_1) + \lambda_2(\alpha_2,\beta_2))$ est <u>l' unique élément</u> de $S^0_{\sigma_n}$ vérifiant :

$f'(x_0) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ et $f''(x_0) = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$.

Or $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est élément de $S^0_{\sigma_n}$ et vérifie :

$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x_0) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ et $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)''(x_0) = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$ ce qui assure que

$$\hat{\Phi}(\lambda_1(\alpha_1,\beta_1) + \lambda_2(\alpha_2,\beta_2)) = \lambda_1\hat{\Phi}((\alpha_1,\beta_1)) + \lambda_2\hat{\Phi}((\alpha_2,\beta_2)) \text{ cqfd.}$$

• $\hat{\Phi}$ <u>est bijective</u>:

Elle est surjective. Soit $f \in S^0_{\sigma_n}$, alors $f = \hat{\Phi}((f'(x_0), f''(x_0)))$.

Elle est injective. Soit $(\alpha_1,\beta_1) \neq (\alpha_2,\beta_2)$, par exemple $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alors $f_1 = \hat{\Phi}((\alpha_1,\beta_1))$ est différent de $f_2 = \hat{\Phi}((\alpha_2,\beta_2))$ car $f_1'(x_0) \neq f_2'(x_0)$. Même raisonnement si c' est $\beta_1 \neq \beta_2$ alors c' est $f_1''(x_0) \neq f_2''(x_0)$ qui permet de conclure.

Conclusion : $dim(S^0_{\sigma_n}) = 2$

5°) a) Soit $f \in S^0_{\sigma_n}$. $f^{(4)}(x)=0$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ car sur un tel intervalle, f coincide avec une fonction polynome de degré ≤ 3.

---

b) Calculons la dérivée de $f'f''$ sur $]x_i, x_{i+1}[$.

$(f'f'')' = f''^2 + f'f'''$ et on peut donc écrire que :

$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big((f'f'')'(x) - (f'f''')(x)\big)dx$ soit :

$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \big[f'(x)f''(x)\big]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)f'''(x)\,dx$. Or on a, en intégrant par parties l'une des intégrales de la dernière somme :

$\begin{cases} u = f''' & u' = 0 \\ v' = f' & v = f \end{cases}$ d'où $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)f'''(x)\,dx = \big[f(x)f'''(x)\big]_{x_i}^{x_{i+1}} - 0 = 0 - 0 - 0 = 0$ d'où

$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \big[f'(x_{i+1})f''(x_{i+1}) - f'(x_i)f''(x_i)\big] = f'(x_n)f''(x_n) - f'(x_0)f''(x_0)$.

---

c) Soit Φ définie par
$$\begin{array}{cccc} \Phi : & S^0_{\sigma_n} & \to & \mathbf{R}^2 \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi'(x_0), \varphi'(x_n)) \end{array}$$

- Φ <u>est injective</u>:

  En effet, supposons $\begin{cases} \varphi'(x_0) = 0 \\ \varphi'(x_n) = 0 \end{cases}$, alors $\int_{x_0}^{x_n} (\varphi''(x))^2\,dx = 0$ et comme φ'' est <u>continue</u> sur $[x_0, x_n]$, on en déduit que φ'' est identiquement nulle sur $[x_0, x_n]$.

  On aurait donc $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\varphi(x) = ax + b$ et alors $\varphi'(x_0) = a = 0$ puis $\varphi(x_0) = b = 0$ et finalement φ est la fonction nulle sur $[x_0, x_n]$.

- Φ <u>est bijective</u>:

  En effet, Φ est évidemment linéaire entre $S^0_{\sigma_n}$ et $\mathbf{R}^2$, deux espaces vectoriels de même dimension 2, et donc injective $\Leftrightarrow$ bijective.

---

d) Montrons qu'il existe une unique fonction $f \in S_{\sigma_n}$ telle que :

$\forall i \in \{0,...,n\}$ $f(x_i) = y_i$; $f'(x_0) = \alpha$; $f'(x_n) = \beta$.

On pourrait faire un raisonnement voisin de celui de la question 5c) en envisageant l'application Ψ allant de S_{σ_n} dans $\mathbf{R}^{n+3}$, qui à f associe $\big(f(x_0), f(x_1), ...f(x_n), f'(x_0), f'(x_n)\big)$.

Montrer que cette application est linéaire, injective, donc bijective vu les dimensions ce qui fournit le résultat cherché.

Je propose une solution plus rudimentaire.

<u>On montre l'unicit</u>é

Supposons que l'on ait deux solutions f_1 et f_2. Alors $f_1 - f_2 \in S^0_{\sigma_n}$ et vérifie $\Phi(f_1 - f_2) = (0,0)$ donc $f_1 - f_2 = 0$, c'est à dire $f_1 = f_2$.

On montre l'existence d'une solution

Soit f l'unique fonction de S_{σ_n} vérifiant :

$\forall i \in \{0,...,n\}$, $f(x_i) = y_i$; $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$. (Cf 4b)).

Soit φ l'unique fonction de $S^0_{\sigma_n}$ vérifiant : $\varphi'(x_0) = \alpha$; $\varphi'(x_n) = \beta - f'(x_n)$, alors $g = f + \varphi \in S_{\sigma_n}$ et vérifie : $\forall i \in \{0,...,n\}$ $g(x_i) = y_i$; $g'(x_0) = \alpha$; $g'(x_n) = \beta$ cqfd.

Partie III

1°) a) Soit f de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

La fonction g, 2-périodique, impaire telle que $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = f(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Dirichlet-Jordan. Sa série de Fourier converge en tout point x de $\mathbf{R}$ et a pour somme $g(x)$, vu la continuité.

Ainsi $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\pi n x)$ $\quad (\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi)$ avec

$c_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$.

Deux intégrations par parties pour calculer c_n fournissent : $c_n = -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 f''(x)\sin(n\pi x)\,dx$.

---

b) Tout ce que l'on peut dire, c'est g'' est continue par morceaux, impaire comme g, sur $\mathbf{R}$. Il se pose d'ailleurs la question de la définition de g'' en les points de $\mathbf{Z}$.

On peut cependant envisager la série de Fourier de g'', mais on ne peut pas garantir que g'' est égale à la somme de sa série de Fourier.

Les coefficients de Fourier de g'' sont : $a_n = 0$; $b_n = 2\int_0^1 f''(x)\sin(n\pi x)\,dx = -n^2\pi^2 c_n$

La série de Fourier de g'' est donc $-\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n \sin(n\pi x)$.

---

c) Nous admettrons que la formule de Parseval-Bessel reste valable pour une fonction continue par morceaux (donnée pour une fonction continue dans le programme).

On a alors $2\int_0^1 (f''(x))^2\,dx = \frac{2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4\pi^4 c_n^2$ soit : $\int_0^1 (f''(x))^2\,dx = \frac{\pi^4}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 c_n^2$.

---

d) Dire que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ sont convergentes, c'est dire que les sommes partielles $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ sont majorées par A et B. (Cf théorèmes sur les séries à termes positifs)

Mais alors l' inégalité de Schwartz donne

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} = \sqrt{A_n}\sqrt{B_n} \le \sqrt{AB}$$ ce qui assure la convergence de la série

à termes positifs $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n b_n|$ et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n b_n| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2\right)^{1/2}$.

---

d) Soit $a_n = n^2 c_n$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge et a pour somme $\frac{2}{\pi^4}\|f\|^2$.

Soit $b_n = \frac{1}{n^2}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge et a pour somme $\frac{\pi^4}{90}$.

On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|$ converge et que sa somme est inférieure ou égale à

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\|f\| = \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}}.$$

Mais alors comme $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\pi n x)$, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \le \sum_{n=1}^{+\infty}|c_n| \le \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}}$.

2°) a) Soit $g_i(t) = (f-\varphi)(x_i + t h_i)$. g_i est de classe C^2 sur $[0,1]$.

On peut appliquer le résultat précédent et on a donc : $\forall t \in [0,1]$, $|g_i(t)| \le \frac{\|g_i\|}{3\sqrt{5}}$.

$g_i''(t) = h_i^2 (f-\varphi)''(x_i + t h_i)$ d' où $\|g_i\| = \sqrt{\int_0^1 \left[(f-\varphi)''(x_i + t h_i)\right]^2 h_i^4 \, dt}$. On pose alors

$u = x_i + t h_i$, $du = h_i dt$ et $\|g_i\| = h_i^{\frac{3}{2}}\sqrt{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[(f-\varphi)''(u)\right]^2 du} \le h_i^{\frac{3}{2}}\|f-\varphi\|$ puisque l' on intègre sur $[x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$.

Conclusion : $\underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{Sup}|f(x)-\varphi(x)| = \underset{t\in[0,1]}{Sup}|(f-\varphi)(x_i + t h_i)| \le \frac{\|f-\varphi\|}{3\sqrt{5}} h_i^{\frac{3}{2}}$.

---

b) Soit à calculer $I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t)-\varphi''(t))\varphi''(t)\, dt$. Une première intégration par parties fournit :

$$\begin{cases} u = \varphi'' , & u' = \varphi''' \\ v' = f'' - \varphi'' , & v = f' - \varphi' \end{cases}$$ d' où $I = \left[(f'(t)-\varphi'(t))\varphi''(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t)-\varphi'(t))\varphi'''(t)\, dt$.

Une deuxième intégration par parties fournit :

$$\begin{cases} u = \varphi''' , & u' = \varphi^{(4)} = 0 \\ v' = f' - \varphi' , & v = f - \varphi \end{cases}$$ d' où

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t)-\varphi'(t))\varphi'''(t)\, dt = \left[(f(t)-\varphi(t))\varphi'''(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - 0 = 0$ et par suite :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t)-\varphi''(t))\varphi''(t)\, dt = \left[(f'-\varphi')\varphi''\right](x_{i+1}) - \left[(f'-\varphi')\varphi''\right](x_i).$$

Mais alors $\int_0^1 \left(f''(t)-\varphi''(t)\right)\varphi''(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\left[(f'-\varphi')\varphi''\right](x_{i+1})-\left[(f'-\varphi')\varphi''\right](x_i)\right)$ soit

$$\int_0^1 \left(f''(t)-\varphi''(t)\right)\varphi''(t)\,dt = \left[(f'-\varphi')\varphi''\right](1)-\left[(f'-\varphi')\varphi''\right](0)=0$$

On peut alors écrire:

$$\int_0^1 \left(f''(t)\right)^2 dt = \int_0^1 \left(f''(t)-\varphi''(t)+\varphi''(t)\right)^2 dt = \int_0^1 \left(f''(t)-\varphi''(t)\right)^2 dt + \int_0^1 \left(\varphi''(t)\right)^2 dt + 0 .$$

D' où $\|f-\varphi\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2$.

---

c) $\underset{x\in[0,1]}{Sup}\left|f(x)-\varphi(x)\right| =\leq \dfrac{\|f-\varphi\|}{3\sqrt{5}} h^{\frac{3}{2}}$ d' après a) et $\|f-\varphi\| \leq \|f\|$ d' après b) d' où

$$\underset{x\in[0,1]}{Sup}\left|f(x)-\varphi(x)\right| =\leq \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}} h^{\frac{3}{2}}$$

FIN