Math C 2011 - correction

Préliminaires : Nous ajouterons aux hypothèses de l'énoncé que la fonction *f* est continue par morceaux sur $[n_0, +\infty[$ pour assurer l'existence des intégrales.

a) $n_0 \leq k-1 \leq k \leq k+1$.
$\forall t \in [k, k+1], f(t) \leq f(k)$, donc en intégrant la fonction *f* et la constante *f*(*k*) sur le segment [*k*, *k*+1], on obtient $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.
De même $\forall t \in [k-1, k], f(k) \leq f(t)$, permet d'obtenir l'autre inégalité demandée.

b) Par la relation de Chasles, $\sum_{k=n_0+1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)dt$ et $\sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_{n_0}^{n} f(t)dt$. Il suffit donc de faire la somme des inégalités justifiées au a) pour *k* variant de n_0+1 à *n*.

c) On suppose d'abord que la série converge, cette série étant à termes positifs, toutes les sommes partielles sont majorées par la somme de la série : $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$.
f étant positive, la fonction $F : x \to \int_{n_0}^{x} f(t)dt$ est une fonction croissante sur $[n_0, +\infty[$:
$$\int_{n_0}^{x} f(t)dt \leq \int_{n_0}^{E(x)+1} f(t)dt \leq \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)dt + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

F est donc une fonction croissante et majorée sur $[n_0, +\infty[$, elle admet donc une limite finie en $+\infty$, c'est-à-dire que l'intégrale converge.

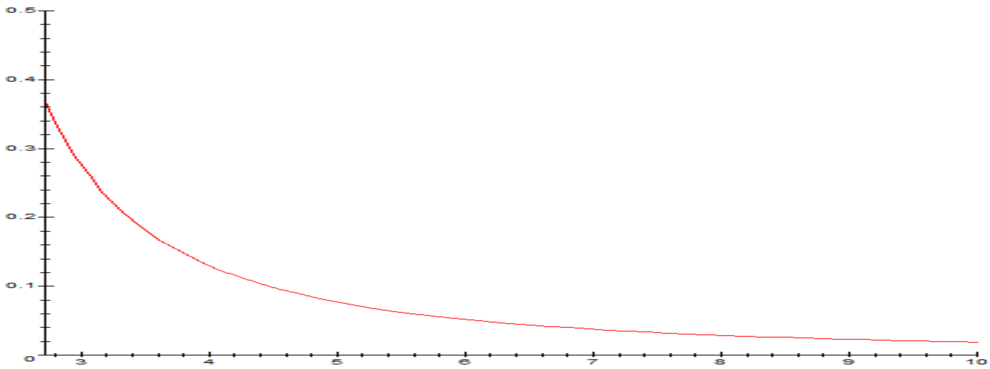
Si l'on suppose que l'intégrale converge,
$$S_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$$
La suite (S_n) est une suite réelle croissante (car *f* est positive) majorée, elle converge donc, ainsi la série converge.
Nous avons donc démontré que la série et l'intégrale sont de même nature.
i.e. : Si l'une converge, l'autre converge et par contraposée, si l'une diverge, l'autre diverge.

Première Partie

1. a) La fonction ln est dérivable sur R*+ et elle ne s'annule pas sur $[e, +\infty[$, donc par théorèmes sur les fonctions dérivables, *f* est dérivable sur $[e, +\infty[$.
$$\forall t \in [e, +\infty[, f'(t) = -\frac{(\ln t)^2 + 2\ln t}{t^2(\ln t)^4} = -\frac{\ln t + 2}{t^2(\ln t)^3}$$

   b) $\forall t \in [e, +\infty[, \ln t \geq 1 > 0$ donc $f'(t) < 0$.
   f est donc décroissante sur $[e, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.
   $f(e) = \frac{1}{e}$ et $f'(e) = -\frac{3}{e^2}$.

c) Allure de la courbe :



d) Une primitive de f est $t \to \frac{1}{\ln t}$ donc $\int_e^X f(t)dt = [\frac{1}{\ln t}]_e^X = 1 - \frac{1}{\ln X}$ tend vers 1 quand X tend vers $+\infty$. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\, dt$ est donc convergente et vaut +1.

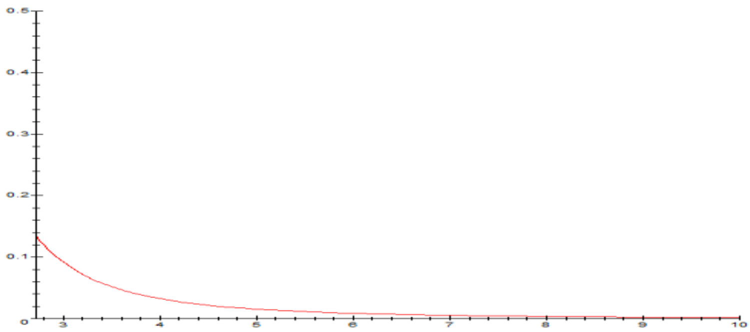
e) La fonction f vérifiant toutes les hypothèses des préliminaires, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^2}$ est convergente.

2. a) La fonction ln est dérivable sur R*+ et elle ne s'annule pas sur $[e, +\infty[$, donc par théorèmes sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur $[e, +\infty[$.

$$\forall t \in [e, +\infty[, g'(t) = -\frac{2t\ln t\,(1+\ln t)}{t^4(\ln t)^4} = -\frac{2\,(1+\ln t)}{t^3(\ln t)^3}$$

b) La fonction ln étant strictement positive sur $[e, +\infty[$, $\forall t \in [e, +\infty[, g'(t) < 0$.
g est donc décroissante sur $[e, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$.

c) Allure de la courbe :



d) Les fonctions f et g sont continues sur $[e, +\infty[$ et f est intégrable sur $[e, +\infty[$.

$$\forall t \in [e, +\infty[, \qquad 0 < \frac{1}{t^2(\ln t)^2} \leq \frac{1}{t^2 \ln t}$$

On en déduit donc par le théorème de convergence par majoration des fonctions positives que g est intégrable sur $[e, +\infty[$.

e) La fonction g vérifiant toutes les hypothèses des préliminaires, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n^2(\ln n)^2}$ est convergente.

3. a) Pour tout entier $n \geq 1$, $t \to \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[n, n+1]$ de primitive $\frac{1}{2}(\ln t)^2$.
Donc $\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}\,((\ln\,(n+1))^2 - (\ln n)^2)$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln\,(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}((\ln\,(n+1))^2 - (\ln n)^2) = \frac{\ln\,(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt$.
La fonction $t \to \frac{\ln t}{t}$ étant décroissante et positive sur $[e, +\infty[$, on déduit des préliminaires que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite est donc décroissante.

c) Toujours d'après les préliminaires : $\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{p=3}^{n} \frac{\ln p}{p}$

Ainsi : $\frac{1}{2}$ (ln $(n+1))^2 -$ (ln $3)^2) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln 2}{2}$

Donc $\frac{1}{2}$ (ln $(n+1))^2 - (\ln n)^2 -$ (ln $3)^2) + \frac{\ln 2}{2} \leq u_n$.

Comme ln $(n+1))^2 - (\ln n)^2 > 0$, on obtient $\frac{1}{2}$ ($-$ (ln $3)^2) + \frac{\ln 2}{2} \leq u_n$ ce qui est l'inégalité demandée.

d) La suite (u_n) est une suite décroissante et minorée, elle est donc convergente.

e) En utilisant que $\frac{\ln p}{\ln n} \leq 1$ pour $p \in [1, n]$,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} = \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

Il est immédiat que la suite de terme général $\frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2}$ a pour limite $+\infty$, donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

4 a) D'après les préliminaires (b) avec $f(x) = 1/x$ et $n_0 = 1$, on a :

$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t} dt$ soit $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$.

Comme $\ln(2) < 1$, on a $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

b) On pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 0$ d'après les préliminaires (a) avec $f(x) = 1/x$ et $k = n$.

D'après le 4) a) , $\gamma_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$.

La suite (γ_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente vers $l \geq 0$.

c) $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + 1/n) = \frac{1}{n} [\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}] - \ln(1 + 1/n) = \frac{-1}{2} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ par un développement asymptotique à l'ordre 2.

On en déduit $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{-1}{2} \frac{1}{n^2}$.

$\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est donc le terme général d'une série convergente par équivalence.

$S_n = \sum_{p=1}^{n-1} (\gamma_{p+1} - \gamma_p) = \gamma_n - \gamma_1 \to S$ donc $\gamma_n = \gamma_1 + S_n \to \gamma_1 + S = l$

d) $\sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n} - \ln(\frac{n}{n-1})) = \sum_{k=1}^{N-1} (\frac{1}{k+1} - \ln(\frac{k+1}{k}))$

$= \sum_{k=1}^{N-1} (H_{k+1} - H_k - \ln(k+1) + \ln(k)) = \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_{k+1} - \gamma_k)$.

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve $\sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \ln(\frac{n}{n-1})) = l - \gamma_1$.

e) $R_n = S - S_n = l - \gamma_1 - (\gamma_n - \gamma_1) = l - \gamma_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \ln(\frac{n}{n-1}))$

f) On fait un développement asymptotique à l'ordre 3 de $g(k) = \ln(\frac{k}{k-1}) - \frac{1}{2k(k-1)}$.

On trouve $g(k) - \frac{1}{k} = \frac{-1}{6k^3} + o(\frac{1}{k^3}) = \frac{1}{k^2} h(k)$ avec $\lim_{k \to +\infty} h(k) = 0$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \left| g(k) - \frac{1}{k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}$.

g) La série de terme général $g(k) - \frac{1}{k}$ est donc absolument convergente par majoration.

On a la majoration de son reste d'après le f).

h) $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$, donc, par télescopage, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$.
$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{2n(n-1)}\right) = \gamma_n - l - \frac{1}{2\,n} = H_n - \ln(n) - l - \frac{1}{2\,n}$.
D'après le g), ce terme tend vers zéro.

Deuxième partie

1. On distingue 3 cas et on note L la limite :
   Si $\beta > 0$ ou si $\beta = 0$, L = 0 (calcul direct), si $\beta < 0$, L = 0 par croissance comparée.
2. On applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, en s'assurant que le dénominateur ne s'annule pas (soit $t_0 > 1$) et on utilise le 1).
3. Clair d'après le 2.
4. $t \to \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{(\ln(t))^\beta}$ est continue et positive sur $]\,t_0,+\infty[$ et est majorée par une fonction dont l'intégrale converge en $+\infty$ car h+1 > 1.
5. D'après le 3) si $n > E(t_0) + 1$, alors $0 < \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{(\ln(n))^\beta} < \frac{1}{n^{h+1}}$. Le critère de convergence des séries de Riemann assure la convergence de la série par majoration.

Troisième partie

a. Comme $\ln(n+1) \sim \ln(n)$, (v_n) est donc convergente vers 0.
b. Vérification facile.
c. On fait un développement asymptotique à l'ordre 2. On pose $v_n = 1 - \frac{a_n}{b_n}$.

$a_n = (1 + \frac{2}{n\ln(n)} - \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2} + o(\frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2}))$
$\frac{1}{b_n} = (1 - \frac{2}{n\ln(n)} + \frac{2}{n^2}\frac{1}{\ln(n)} + \frac{4}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2} + o(\frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2}))$
$\frac{a_n}{b_n} = (1 + \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2} + o(\frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2}))$
$v_n - \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2} + o(\frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2}) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{(\ln(n))^2}(1 + \Phi(n))$ avec
$\lim_{n\to+\infty}\Phi(n) = 0$. Ceci assure donc l'existence de b en utilisant qu'une suite convergente est bornée. On a aussi trouvé $a = 1$.
$v_n = (v_n - \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)}) + \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)}$.
$\left(\sum(vn - \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)})\right)$ est convergente car absolument convergente par majoration (en utilisant I 2e)
$\left(\sum \frac{1}{n^2}\frac{1}{\ln(n)}\right)$ est convergente en utilisant I 1 e)
$(\sum v_n)$ est convergente par somme de 2 séries convergentes.