BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

OPTION : LETTRES & SCIENCES HUMAINES

MATHEMATIQUES
Programme ENS (B/L)

Vendredi 4 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants

Problème 1

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais que nous noterons $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans le préliminaire et dans chacune des parties, par souci de simplification d'écriture.
Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, celle-ci est notée $E(X)$.

Préliminaire

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, dont les densités, notées respectivement f_X et f_Y, sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$. On note F_X et F_Y leurs fonctions de répartition respectives.

Montrer que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_Y(t) f_X(t)dt$ est convergente.

Dans la suite, on admet que si les variables aléatoires X et Y vérifient les conditions précédentes et sont de plus indépendantes, alors : $P(Y \leqslant X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_Y(t) f_X(t)dt$.

Partie 1

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. On note F sa fonction de répartition et G la fonction définie par : pour tout réel x, $G(x) = 1 - F(x)$.

On dit que X est une variable aléatoire sans mémoire si et seulement si, pour tout couple (x, y) de réels positifs, on a : $G(x+y) = G(x)G(y)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. Vérifier que X est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire, de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$, et de fonction de répartition F. On pose toujours $G(x) = 1 - F(x)$.
   (a) Justifier la dérivabilité de G sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En considérant, pour x et h positifs, $h \neq 0$, le rapport $\dfrac{G(x+h) - G(x)}{h}$, montrer que pour tout réel x positif, on a $G'(x) = G'(0)G(x)$, où G' désigne la dérivée de la fonction G.
   (c) On pose $G'(0) = -a$ et, pour tout réel x positif, $H(x) = e^{ax}G(x)$. Montrer que H est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) En déduire finalement que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
3. On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.
   (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, indépendante de Y, et de densité continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide de la question préliminaire, que $P(Y > X) = E(e^{-\lambda X})$.
   (b) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité, indépendantes et indépendantes de Y, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et de densité continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Exprimer $P(Y > X_1 + X_2)$ en fonction de $P(Y > X_1)$ et de $P(Y > X_2)$.
   (c) Quelle propriété se trouve ainsi généralisée ?

Partie 2

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

On définit alors la variable aléatoire N égale au premier indice n, s'il existe, tel que $X_n > X_0$, et on pose $N = 0$ si un tel indice n'existe pas. Autrement dit, $N = \inf\{n \geqslant 1 / X_n > X_0\}$ si cet ensemble est non vide, et $N = 0$ si cet ensemble est vide.

1. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Z_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$. On admet que Z_n est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
2. Vérifier que $(N = 0) = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} (Z_n \leqslant X_0)$
3. On rappelle que si (A_n) est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire vérifiant, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, alors : $P(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
   En utilisant ce résultat et le résultat admis dans la question préliminaire, calculer $P(N = 0)$.
4. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(N > n)$ à l'aide d'événements faisant intervenir Z_n et X_0.
5. Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la valeur de $P(N > n)$, puis celle de $P(N = n)$.
6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Partie 3 (Cette partie est indépendante des parties 1 et 2)

1. Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives, de densité f continue sur $\mathbb{R}_+$ et dont la fonction de répartition est notée F.
   On suppose qu'il existe un réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha(1 - F(t)) = 0$.
   Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt$.
2. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1, et on pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $U_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, $U_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
   On admet que U_n est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de U_n. En déduire, sans calcul, son espérance et sa variance.

3. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$, et indépendante des variables aléatoires X_k ($k \in \mathbb{N}^*$). On pose $q = 1 - p$.
On pose, pour tout ω de Ω, $U(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega))$, et on admet que $U = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ est une variable aléatoire.

   (a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $P(U > x)$.

   (b) À l'aide de la première question de cette partie, montrer que la variable aléatoire U admet une espérance, et que celle-ci est donnée par : $E(U) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{pe^{-t}}{1 - qe^{-t}} dt$.

   (c) À l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$, dont on justifiera la validité, calculer $E(U)$ en fonction de p et de q.

Problème 2

Dans tout ce problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n supérieure ou égale à 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Si u est un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$:
- on pose $u^0 = Id_E$, et pour tout entier naturel j non nul, $u^j = u^{j-1} \circ u$;
- si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k u^k$, et on admet que pour tous polynômes P et Q de E, on a $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$;
- on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u) / P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* si et seulement si il existe un vecteur a de E tel que la famille $\big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ soit une base de E.

Partie 1

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme cyclique de E, et $\mathcal{B} = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ une base de E.
On note $\mathcal{C}(u)$ le *commutant* de u, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec u. On a donc $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / v \circ u = u \circ v\}$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable pour la composition des endomorphismes.

   (b) Établir l'inclusion $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)$.

2. Soit v un élément de $\mathcal{C}(u)$.

   (a) Justifier l'existence de n réels, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, tels que $v(a) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(a)$.

   (b) On considère l'endomorphisme w défini par $w = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$.
   En comparant les images des éléments de $\mathcal{B}$ par v d'une part, et par w d'autre part, montrer que $v = w$.

   (c) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.

3. Montrer que la famille $\big(Id_E, u, \ldots, u^{n-1}\big)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

4. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Partie 2

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : un endomorphisme de E diagonalisable est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

1. Exemples

On suppose dans cette question que $n = 3$; on note $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, et on considère les deux endomorphismes u et v dont les matrices dans la base $\mathcal{F}$ sont respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que u et v sont deux endomorphismes cycliques.

   (b) Déterminer les valeurs propres de u, et en déduire que u est diagonalisable.

   (c) Déterminer les valeurs propres de v.

   (d) Donner les dimensions des sous-espaces propres de v.

   (e) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

Jusqu'à la fin du problème, on revient au cas général où n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.

2. Soit u un endomorphisme de E qui admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u, tels que, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

   On considère le vecteur x défini par : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$.

   (a) Donner, pour tout p de $[\![0, n-1]\!]$, l'expression de $u^p(x)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

   (b) Soit n réels, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, tels que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p u^p(x) = 0$, et Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

   $Q = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$. Montrer que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_k) = 0$.

   (c) Déduire de ce qui précède que u est un endomorphisme cyclique.

3. Dans cette question, on suppose que u est un endomorphisme diagonalisable admettant p valeurs propres distinctes, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, avec $p < n$. On pose $H(X) = \displaystyle\prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$.

   (a) Calculer $(H(u))(x_k)$ lorsque x_k est un vecteur appartenant au sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_k.

   (b) Pour tout vecteur x de E, calculer $(H(u))(x)$. Quel est l'endomorphisme $H(u)$?

   (c) En déduire, en utilisant les résultats de la partie 1, que u n'est pas un endomorphisme cyclique.

4. Conclure.

Partie 3

1. Soit u un endomorphisme de E, nilpotent d'indice n, c'est-à-dire tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une famille libre de vecteurs de E.

   (b) En déduire que u est un endomorphisme cyclique.

2. On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. On confondra polynôme et fonction polynomiale associée. On considère les deux endomorphismes D et Δ de E définis par : pour tout P de E, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $(D(P))(x) = P'(x)$ et $(\Delta(P))(x) = P(x+1) - P(x)$, où P' désigne la dérivée de P.

   (a) En utilisant la question précédente, montrer que D est cyclique.

   (b) Montrer que Δ est un élément de $\mathcal{C}(D)$.

   (c) En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que $\Delta = Q(D)$.

   (d) À l'aide de la formule de Taylor, exhiber un tel polynôme.