BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Conception : ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

OPTION LETTRES & SCIENCES HUMAINES

MATHEMATIQUES
Programme ENS (B/L)

Vendredi 7 mai 2010, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Dans tout le problème, on considère les suites $(H_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout entier naturel n non nul, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie 1

1. Établir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite (H_n) ?
   (b) En utilisant le résultat de la question 1, montrer pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

   (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   (b) En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.
4. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, dont les dérivées première et seconde sont notées respectivemei f' et f''. On suppose que f'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On pose pour tout entier naturel k non nul :

$$J_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)dt$$

(a) Établir pour tout entier naturel k non nul, l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)dt$$

(b) En déduire pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(a) Établir pour tout entier naturel k non nul, la double inégalité suivante : $0 \leqslant J_k \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}dt$.

(b) En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

(c) En déduire également, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$.

(d) Prouver l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, de limite nulle, telle que l'on ait pour tout entier naturel n non nul :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

Partie 2

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) la série de terme général a_n est convergente ;

(ii) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ (a_n est équivalent à b_n lorsque n tend vers $+\infty$).

(a) Soit ε un réel strictement positif. Justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n.$$

(b) En déduire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(c) Établir l'équivalence suivante :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

7. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

(a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}dt$$

(b) En déduire pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité suivante :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}dt$$

(c) Établir l'équivalence suivante :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Partie 3

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :

$$\forall n \geqslant 1,\ x_n = u_n - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ y_n = x_n - x_{n-1}.$$

8. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

   (b) Justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k.$$

   (c) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

9. (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\geqslant 1}$ convergente de limite nulle vérifiant :

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}.$$

   (b) Établir à l'aide d'un développement limité à l'ordre 3, l'équivalence suivante :

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

10. En utilisant les résultats précédents, en déduire l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon''_n)_{n\geqslant 1}$, de limite nulle, vérifiant pour tout entier naturel n non nul :

$$H_n = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon''_n}{n^2}$$

Problème 2

Dans tout le problème, on confond l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et l'ensemble des matrices-colonnes $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Préliminaire

Pour tout entier naturel n, on considère une matrice $A_n = (a_{i,j}(n))_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$, si pour tout couple (i,j) de $[\![1,4]\!]^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$; on note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$.
Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, et soit B et C deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et E une matrice de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. Établir les résultats suivants :

$$\lim_{n\to+\infty} BA_n = BA\ ,\quad \lim_{n\to+\infty} A_nB = AB\ ,\quad \lim_{n\to+\infty} BA_nC = BAC \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} A_nE = AE$$

On dispose d'une part, d'une urne G contenant 4 boules, d'autre part, d'une réserve de boules, et enfin d'une pièce de monnaie équilibrée (à chaque lancer, la probabilité d'obtenir, soit *Pile*, soit *Face* est égale à $\frac{1}{2}$).
On effectue une suite d'épreuves aléatoires consistant à ajouter ou enlever des boules de l'urne G selon un certain protocole décrit ci-dessous. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n *la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne G avant la n-ième épreuve.* Ainsi, $X_1 = 4$.
Les épreuves se déroulent selon le protocole suivant :

- Si $X_n \leqslant 2$, on ajoute 1 boule dans G ;
- Si $X_n = 3$, on lance la pièce trois fois de suite. À l'issue de ces trois lancers :
  * si on n'obtient aucun *Pile*, on enlève 2 boules de G ;
  * si on obtient *Pile* une fois, on enlève 1 boule de G ;
  * si on obtient *Pile* deux fois ou trois fois, on ne modifie pas le contenu de G.
- Si $X_n = 4$, on lance la pièce quatre fois de suite. À l'issue de ces quatre lancers :
  ⋆ si on n'obtient aucun *Pile*, on enlève 3 boules de G ;
  ⋆ si on obtient *Pile* une fois, on enlève 2 boules de G ;
  ⋆ si on obtient *Pile* deux fois ou trois fois, on enlève 1 boule de G ;
  ⋆ si on obtient *Pile* quatre fois, on ne modifie pas le contenu de G.

On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère pour tout entier naturel n non nul, l'élément U_n de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ défini par : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
   (b) Pour tout couple (j, k) de $[\![1, 4]\!]^2$ et tout entier naturel n non nul, donner les valeurs des probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = j])$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1/16 \\ 1 & c & d & 1/4 \\ 0 & e & f & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}$.
   On complétera l'expression de A en remplaçant a, b, c, d, e, f par leurs valeurs à l'aide des résultats de la question précédente.
4. On pose : $B = 16A$.
   (a) Montrer que le nombre complexe λ est valeur propre de B si et seulement si $\dfrac{\lambda}{16}$ est valeur propre de A.
   (b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de B est : $\{16, 1, -4 - 4i, -4 + 4i\}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
   (c) En déduire les valeurs propres de A.
5. Déterminer le vecteur propre V de A associé à la valeur propre 1, dont la somme des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est égale à 1.
6. (a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible Q dont la première colonne est V, vérifiant la relation : $A = QDQ^{-1}$.
   (b) On note $|z|$ le module d'un nombre complexe z. On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z|^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} z^n = 0$.
   Établir l'égalité : $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.
7. Soit $L = (x\ y\ z\ u)$ la première ligne de Q^{-1}. On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
   (a) En considérant l'égalité $Q^{-1}A = DQ^{-1}$, montrer que ${}^tL$ est vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.
   (b) En utilisant la relation ${}^tA{}^tL = {}^tL$, en déduire que $x = y = z = u$.
   (c) Utiliser la relation $Q^{-1}Q = I$ pour montrer que $x = y = z = u = 1$ (I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
8. Montrer que les quatre colonnes de $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$ sont égales à V.
9. En déduire pour tout k de $[\![1, 4]\!]$, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k])$.