e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Notations

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x.$$

Soit S la série entière :

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n.$$

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir le tableau de variations de f.
3. Représenter le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
5. Justifier l'existence d'une fonction g continue sur l'intervalle fermé $[-\frac{1}{e}, +\infty[$. et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in [-\frac{1}{e}, +\infty[, \quad g(x)e^{g(x)} = x.$$

Dans la suite du problème, on considère la fonction réciproque de la restriction de f à $[-1, +\infty[$, c'est-à-dire une fonction g définie et continue sur l'intervalle fermé $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in [-\frac{1}{e}, +\infty[, \quad g(x)e^{g(x)} = x.$$

Partie II

1. Calculer $g(0)$, $g(\frac{-1}{e})$ et $g(e)$.
2. Exprimer la fonction dérivée g' en fonction de g.
3. Représenter le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-\frac{1}{e}, +\infty[$. La fonction g admet-elle une tangente au point d'abcisse $-\frac{1}{e}$?
4. Démontrer que la fonction g admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
5. Soit h la primitive de g définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ et qui prend la valeur 0 en 0.
   (a) Exprimer $h(u)$ fonction de $g(u)$ pour u dans l'intervalle $]-\frac{1}{e}, +\infty[$. (*Indication : on pourra faire le changement de variables $x = g(t)$ dans l'intégrale $\int_0^u g(t)dt$.*) Ce résultat reste-t'il valable pour $u = -\frac{1}{e}$?
   (b) En déduire la valeur de $\int_{-1/e}^{0} g(t)dt$.

Partie III

Soit c un nombre réel tel que $0 < c < e^{1/e}$. On considère la suite récurrente $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = c, \\ u_{n+1} = c^{u_n} = e^{u_n \ln c}, \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Que dire de la suite U dans le cas particulier $c = 1$?

On suppose dans la suite de la partie III que $c \neq 1$.

2. On suppose que la suite U converge. On note ℓ cette limite. Démontrer que $\ell = -g(-\ln(c))/\ln c$.

3. On suppose dans cette question uniquement que $c = \sqrt{2}$.
   (a) Démontrer les inégalités $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.
   (b) Démontrer que la suite U est croissante et majorée par 2.
   (c) Démontrer que la suite U converge vers 2.

4. On suppose dans cette question uniquement que $c = e^{-e}$.
   (a) Etablir le tableau de variation de la fonction w définie par $w(x) = e^{-ex}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) En déduire les propriétés suivantes de la suite U :
      i. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de U est monotone et contenue dans $]0, 1/e]$.
      ii. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de U est monotone et contenue dans $[1/e, 1[$.
      iii. $u_0 \leqslant u_2$ (*Indication : on pourra comparer* $\ln(u_0)$ *et* $\ln(u_2)$).
      iv. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
      v. Un calcul qui n'est pas demandé assure que la fonction qui envoie le nombre réel x sur $w(w(x)) - x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Démontrer que la suite U converge et déterminer sa limite.

Partie IV

1. (a) Démontrer que la suite de terme général $(1 + \frac{1}{n})^n$ converge vers le nombre e.
   (b) En déduire le rayon de convergence de la série S.

2. On se propose d'étudier le comportement de la série entière S sur le cercle d'équation $|z| = R$, R étant le rayon de convergence de S.
   (a) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n.$$

   i. Déterminer un équivalent de la suite v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   ii. En déduire la nature de la série de terme général v_n.
   iii. Démontrer que la suite de terme général u_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. On notera L cette limite.
   iv. En déduire un équivalent de la suite $\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Démontrer que la série de terme général $\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ est convergente.

(c) Conclure.

Partie V - A

Etant donné R un nombre réel > 0, on note :

- $\mathcal{K}_R$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[\setminus\{0\}$,
- $\mathcal{C}_R$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}_R$ des fonctions qui se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$,
- $\mathcal{E}_R$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_R$ des fonctions qui admettent un développement en série entière sur $]-R, R[$.

On note ϕ et ψ les fonctions dans $\mathcal{K}_R$ définies par :

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\},\ \phi(x) = x \text{ et } \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

On remarque que le produit de deux fonctions de $\mathcal{K}_R$ est une fonction de $\mathcal{K}_R$. En particulier, si h est une fonction de $\mathcal{K}_R$ et si n est un entier naturel non nul, $\psi^n h$ est la fonction de $\mathcal{K}_R$ définie par :

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\},\ (\psi^n h)(x) = \frac{h(x)}{x^n}.$$

Soit $\mathcal{L}_R$ l'ensemble des fonctions $\psi^n h$ où n est un entier naturel et h une fonction dans $\mathcal{E}_R$.

1. Démontrer que $\mathcal{L}_R$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}_R$ et que $\mathcal{L}_R$ contient $\mathcal{E}_R$.

2. Soit h dans $\mathcal{L}_R$. Démontrer qu'il existe une unique suite de nombres réels $(\alpha_i(h))_{i\in\mathbb{Z}}$, ayant au plus un nombre fini de termes indexés négativement et non nuls, telle que

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\},\ \ h(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(h) x^i.$$

3. Démontrer que α_{-1} est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_R$ qui s'annule sur $\mathcal{E}_R$.

4. Soit h dans $\mathcal{L}_R$. Démontrer que sa fonction dérivée h' appartient à $\mathcal{L}_R$ et vérifie $\alpha_{-1}(h') = 0$.

5. Soit f la fonction étudiée dans la partie I.

   (a) Démontrer que la fonction f'/f appartient à $\mathcal{L}_R$ et expliciter, en fonction de l'entier k, $\alpha_k(f'/f)$, pour tout entier relatif k.

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que la fonction $1/f^n$ appartient à $\mathcal{L}_R$ et expliciter en fonction de l'entier k $\alpha_k(1/f^n)$, pour tout entier relatif k.

Partie V - B

On admet que la fonction g étudiée dans la partie II est développable en série entière sur $]-1/e, 1/e[$: il existe une suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout x dans $]-1/e, 1/e[$, $g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$. On se propose de calculer les coefficients $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Déterminer c_0 et c_1.

2. Démontrer qu'il existe un nombre réel R tel que $\forall x \in]-R, R[$, $|xe^x| < 1/(2e)$.

3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{i=0}^{+\infty} c_i f^i$ converge normalement sur $]-R, R[$ vers la fonction ϕ.

4. Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}$ converge uniformément sur $]-R, R[$.

5. Soit n un entier naturel.

   (a) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^i$ converge normalement sur $]-R, R[$ vers une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$.

   (b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}$ converge normalement sur $]-R, R[$ vers une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$. (*Indication : on pourra commencer par justifier qu'une série entière de rayon de convergence non nul* $U(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i x^i$ *et telle que* $U(x)/x^n$ *admet une limite finie lorsque* x *tend vers* 0 *vérifie* $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$).

   (c) Démontrer, pour tout nombre réel x dans $]-R, R[\setminus\{0\}$, l'égalité :

   $$\sum_{i=0}^{n-1} c_i f'(x) f^{i-n-1}(x) + c_n \frac{f'(x)}{f(x)} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i f'(x) f^{i-n-1}(x) = \frac{x f'(x)}{f^{n+1}(x)}.$$

   (d) En déduire que :

   $$c_n = \alpha_{-1}\left(\frac{\phi f'}{f^{n+1}}\right).$$

   (e) En considérant la dérivée de la fonction ϕ/f^n, démontrer que

   $$c_n = \alpha_1\left(\frac{-1}{n f^n}\right).$$

   En déduire la valeur de c_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

6. Quelle relation peut-on en déduire entre la fonction g et la série S ?

IN CHOISY – 12 1015 – D'après documents fournis