e3a PSI A (3 heures)
calculatrices interdites.

Questions d'application du cours.

Parmi les affirmations suivantes, indiquez sans justification (sauf en 2.d) celles que vous jugez vraies et celles que vous jugez fausses.

Soient a, b deux réels. On note $\mathcal{E}_{a,b}$ l'espace vectoriel des suites **réelles** qui vérifient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Q.1.

- **a.** Pour tous réels a et b, $\mathcal{E}_{a,b}$ contient au moins une suite géométrique non nulle.
- **b.** Pour que $\mathcal{E}_{a,b}$ contienne deux suites géométriques linéairement indépendantes, il suffit que $a = -3$ et $b = 4$.
- **c.** Pour que $\mathcal{E}_{a,b}$ contienne deux suites géométriques linéairement indépendantes, il faut que $a = -3$ et $b = 4$.
- **d.** $\mathcal{E}_{a,b}$ contient deux suites géométriques indépendantes quand $a = 2$ et $b = -1$.
- **e.** La condition $a^2 + 4b \geq 0$ est une condition nécessaire pour qu'il existe dans $\mathcal{E}_{a,b}$ deux suites géométriques indépendantes.

Q.2.

- **a.** L'application $f\ :\ u \in \mathcal{E}_{a,b} \mapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire toujours surjective mais injective seulement si $a^2 + 4b < 0$.
- **b.** La condition $a \neq 0$ est une condition suffisante pour que $g\ :\ u \in \mathcal{E}_{a,b} \mapsto (u_0, u_2) \in \mathbb{R}^2$ soit un isomorphisme.
- **c.** La dimension de $\mathcal{E}_{a,b}$ est égale à deux si et seulement si $a^2 + 4b \geq 0$.
- **d.** Donner, en le justifiant soigneusement, une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_{a,b}$ dans le cas où $a = -1$ et $b = -1$.

Q.3. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où $a_n = \frac{n^n}{n!}$ et on note R son rayon de convergence.

- **a.** On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et on en déduit que $R = 1$.
- **b.** On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ et on en déduit que la série entière diverge pour toute valeur du réel x.
- **c.** On a $R < 1/2$.

Q.4. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$ et on note r son rayon de convergence.

- **a.** On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \frac{1}{n}$ et donc $r \leq 1$.
- **b.** On a $r \geq 1$.
- **c.** Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \sin(n) x^{n-1}$ vaut 1 et donc $r = 1$.
- **d.** On a $r \geq 1/2$.
- **e.** Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \arctan\left(\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right)$.
- **f.** Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = -\ln|1 - xe^i|$.
- **g.** Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos(1) + x^2)$.

Problème.

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel des suites réelles.
On pourra noter une suite $u \in E$ sous la forme $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ ou sous la forme $u = (u_n)$.
Une suite u de E est dite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

Partie A.

Soit l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{u \in E / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\}$.

1. Soient les deux suites λ et μ définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\mu_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

1.1 Vérifier que λ et μ sont des éléments de $\mathcal{S}_0$.

1.2 Montrer que ces deux suites sont périodiques.

2. Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Donner une base de $\mathcal{S}_0$ et préciser sa dimension.

4. Soit $u \in \mathcal{S}_0$ non nulle.

4.1 La suite u est-elle convergente ?

4.2 La série $\sum u_n$ de terme général u_n est-elle convergente ?

4.3 Soit f la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
Donner l'ensemble de définition de f et une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles et des termes u_0 et u_1.

Partie B.

Soit $\mathcal{S} = \{u \in E / \ \exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 2a\}$, c'est à dire l'ensemble des suites réelles u pour lesquelles **il existe une constante réelle** a telle que pout tout entier naturel n, $u_{n+2} + u_n = 2a$.

1. **1.1** On prend $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$. Vérifier que $u \notin \mathcal{S}$.

1.2 On prend $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{E(n/2)}$ où $E(t)$ désigne la partie réelle du réel t. Vérifier que $u \in \mathcal{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

1.3 On prend $u_n = 5$. Vérifier que $u \in \mathcal{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

2. Vérifier que les suites constantes appartiennent à $\mathcal{S}$.

3. Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathcal{S}$.

4. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

5. A-t-on $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0$? $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$?

6. Soit $\varphi\ :\ u \in \mathcal{S} \mapsto \varphi(u) = \frac{u_0+u_2}{2}$. Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}$. Quel est son noyau ?

7. Soit $v \in E$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1$. Montrer que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathrm{Vect}(v)$ où $\mathrm{Vect}(v)$ est la droite vectorielle engendrée par la suite v.

8. Soit $u \in \mathcal{S}$. Déterminer alors pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

9. Montrer que tout élément $u \in \mathcal{S}$ est une suite périodique de période 4.

10. Prouver que l'application $\theta\ :\ u \in \mathcal{S} \mapsto \theta(u) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On note $\mathcal{C} = (I, J, K)$ la base de $\mathcal{S}$ obtenue comme image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par θ :

$$\theta(I) = (1,0,0),\ \theta(J) = (0,1,0),\ \theta(K) = (0,0,1)$$

11. Expliciter les cinq premiers termes de chacune des suites I, J, K.

12. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $T_k\ :\ u \in E \mapsto T_k(u) = w$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{kn}$.

12.1 Vérifier que T_k est un endomorphisme de E.

12.2 Le sous-espace $\mathcal{S}$ est-il stable par T_2 ?

12.3 Le sous-espace $\mathcal{S}$ est-il stable par T_3 ?

12.4 Ecrire la matrice, dans la base $\mathcal{C}$ obtenue à la question **10**, de l'endomorphisme τ_3 induit par T_3 sur $\mathcal{S}$.

12.5 L'endomorphisme τ_3 de $\mathcal{S}$ est-il diagonalisable ?

12.6 Reconnaître alors la nature géométrique de τ_3.

13. Soient $u \in \mathcal{S}$ et h la fonction de la variable réelle x donnée par $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Exprimer $h(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour $x \in]-1, 1[$. Etudier les prolongements possibles en -1 et 1.

Partie C.

Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathcal{S}_p = \{u \in E/\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + u_n = 2a\}$.

1. Montrer que tout élément de $\mathcal{S}_p$ est périodique de période $2p$.

2. Soit $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$

2.1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice F.

2.2 Déterminer les valeurs propres de F.

2.3 F est-elle inversible ?

2.4 F est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$?

3. Prouver que l'application δ définie par $\forall u \in \mathcal{S}_p,\ \delta(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, a) \in \mathbb{R}^{p+1}$ où $a = \frac{u_0 + u_p}{2}$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de $\mathcal{S}_p$?
On note $\mathcal{C}_p$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ par δ.

4. Soit ψ l'application définie par

$$\psi\ :\ u \in \mathcal{S}_p \mapsto \psi(u) = t \ \text{ telle que } \ \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = u_{n+1}$$

4.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.

4.2 Sans nouveau calcul, préciser $\psi^{2p} = \psi \circ \cdots \circ \psi$, composée $2p$ fois de l'application ψ.

4.3 Ecrire la matrice de ψ dans la base $\mathcal{C}_p$ de $\mathcal{S}_p$.

4.4 ψ est-elle diagonalisable ?

4.5 Prouver que ψ est bijective et déterminer son inverse ψ^{-1}.