Banque « Agro »
A et AE – 0200

MATHÉMATIQUES
Épreuve A
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Les trois problèmes sont totalement indépendants.

PROBLEME 1.
PARTIE 1.

1.1. On note E l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles qu'il existe un couple (a, b) de réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = ax_n + b$.
Déterminer suivant la valeur de a une expression de x_n en fonction de a, b, n et x_0.
Indication : on pourra chercher un réel L vérifiant $L = aL + b$ et, lorsque L existe, étudier la suite de terme général $x_n - L$.
Applications numériques :
(i) $a = 2$, $b = -1$
(ii) $a = -1$, $b = 6$

1.2. Soit (α, β) un couple de réels non nuls. On note $F(\alpha, \beta)$ l'ensemble des suites réelles définies par leur premier terme et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{y}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{y}_\mathrm{n} + \alpha \mathrm{n} + \beta$.

1.2.a. Montrer qu'il existe une solution $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que z_n est une fonction polynômiale de degré deux en n.

1.2.b. Montrer que la différence entre deux éléments de $F(\alpha, \beta)$ est une suite constante. En déduire l'expression, pour un élément quelconque de $F(\alpha, \beta)$, de son terme général y_n en fonction de n, α, β et y_0.

PARTIE 2.

On considère deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes repectifs u_0 et v_0, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} = (1/2)\mathrm{u}_\mathrm{n} - (3/2)\mathrm{v}_\mathrm{n} + 5 \text{ et } v_{n+1} = -(3/2)u_n + (1/2)v_n + 7.$$

2.1. On pose, pour tout n entier naturel : $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$. Montrer que, pour que la suite w ainsi définie soit un élément de E, il suffit que (λ, μ) soit vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.2.a. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$, (W_1, W_2), formée de vecteurs propres pour A et déterminer cette base de manière à ce que les premières composantes de W_1 et de W_2 sur la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ soient égales à 1.

2.2.b. Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers (W_1, W_2). Déterminer P^{-1}.

2.3. On considère les suites c et d, définies pour tout entier naturel par :

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2.3.a. Exprimer c_n et d_n en fonction de n, u_0 et v_0.
2.3.b. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

PROBLÈME 2.

Notations

Dans ce problème, on notera $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même telles que $f(0) = 0$ et qui admettent une dérivée positive, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On notera $\mathcal{N}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ formé des fonctions f telles que $f'(0) = 0$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty.$$

PARTIE 1 : *Fonction conjuguée*

Dans toute cette partie f désigne un élément de $\mathcal{N}$.
1.1. Quels sont les différents comportements possibles de $f'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
1.2. On se propose d'établir dans cette question l'équivalence (1) entre les deux propositions :

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x)) = +\infty \; et \; \lim_{x \to +\infty} (\frac{f(x)}{x}) = +\infty$$

1.2.a. Montrer que pour tout x, réel positif, on a l'inégalité : $f(x) \leq x f'(x)$, et vérifier que cette inégalité est stricte si $x > 0$.
1.2.b. En déduire que la fonction qui à tout x réel strictement positif associe $\frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.
1.2.c. Justifier, pour tout x réel positif l'inégalité : $x f'(x) \leq f(2x)$.
Indication : on pourra évaluer la différence $f(2x) - f(x)$.
1.2.d. Conclure quant à l'équivalence (1) énoncée ci dessus.
1.2.e. *Un exemple* :
Justifier le fait que $x \to Arctan(x)$ est bien continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que son unique primitive F sur $\mathbb{R}^+$ nulle en 0 est élément de $\mathcal{N}$ et expliciter $F(x)$ pour x réel positif.
Déterminer les limites respectives de $\frac{F(x)}{x}$ en 0 et $+\infty$ et donner une représentation graphique de F.

1.3. Dans toute la suite du problème, on supposera que f est un élément de $\mathcal{N}_0$.

1.3.a. Montrer que, pour tout t réel positif, la fonction w_t définie pour tout x réel positif par :

$$w_t(x) = tx - f(x)$$

admet un maximum et qu'elle l'atteint en un unique réel positif x_t.
On notera ϕ la fonction qui, à tout t réel positif associe x_t et f^* la fonction qui à t associe $w_t(x_t)$. La fonction f^* sera appelée **fonction conjuguée de f.**

1.3.b. Démontrer que ϕ est continue, strictement croissante, que $\phi(0) = 0$ et que $\phi(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

1.4.a. Dans cette question, t est un réel strictement positif et h est un réel vérifiant : $|h| \leq t$. Justifier l'existence d'un réel $\alpha_{t,h}$ compris entre t et $t+h$ tel que :

$$f(\phi(t+h)) - f(\phi(t)) = \alpha_{t,h}.(\phi(t+h) - \phi(t))$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$f^*(t+h) - f^*(t) = h\phi(t) + \beta_{t,h}.(\phi(t+h) - \phi(t))$$

où $\beta_{t,h}$ est un réel vérifiant : $|\beta_{t,h}| \leq |h|$, puis montrer que f^* est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^{*+}$ et que sa dérivée sur $\mathbb{R}^{*+}$ est la fonction ϕ.
Montrer que f^* est dérivable en 0 et donner son nombre dérivé en 0.

1.4.b. Vérifier que les fonctions dérivées f' et $(f^*)'$ sont réciproques l'une de l'autre. En déduire que f^* appartient à $\mathcal{N}_0$ et l'égalité : $f^{**} = f$, où on note f^{**} la fonction conjuguée de f^*.

1.5. *Des exemples*
Dans les trois cas suivants, justifier l'appartenance de f à $\mathcal{N}_0$ et exprimer $f^*(t)$ en fonction de t pour t réel positif.
1.5.a. Premier cas : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = Kx^2$, où K est un réel strictement positif. On montrera de plus qu'il existe un unique K tel que $f = f^*$.
1.5.b. Deuxième cas : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^m$, où m est un réel strictement supérieur à 1. On montrera de plus que $f^*(t)$ peut se mettre sous la forme $\lambda_m(\frac{t}{m})^\beta$.
1.5.c. Troisième cas : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \exp(x) - 1 - x$. On vérifiera par un calcul direct la relation $f = f^{**}$.

PARTIE 2 *Recherche des fonctions f vérifiant l'égalité $f = f^*$*

2.1. Vérifier pour tout couple (x, t) de réels positifs l'inégalité :

$$xt \leq f(x) + f^*(t)$$

Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x = \phi(t)$.
2.2. Montrer que, si g est un élément de $\mathcal{N}_0$ et si $f \leq g$, alors on a : $g^* \leq f^*$, où g^* est la fonction conjuguée de g.
2.3. En déduire que la seule fonction f élément de $\mathcal{N}_0$ vérifiant l'égalité $f = f^*$ est la fonction notée f_2, qui à tout x réel positif associe $f_2(x) = \frac{x^2}{2}$.

PROBLEME 3.

Dans tout le problème p est un réel strictement supérieur à 1 et on note q le réel tel que :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

1.a. Soit m un réel positif et u la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u(x)=mx-\frac{x^p}{p}.$$

Montrer que le maximum de u est de la forme : Cm^q, où C est une constante que l'on déterminera.

1.b. En déduire que, pour tout couple (x,y) de réels positifs, on a l'inégalité :

$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

et que, pour tout réel λ strictement positif, on a aussi l'égalité :

$$xy\leq\frac{\lambda^p x^p}{p}+\frac{y^q}{q\lambda^q}$$

1.c. Soit n un entier naturel non nul et $(x_1,..x_n)$, $(y_1,..y_n)$ deux éléments de $(\mathbb{R}^+)^n$.
Justifier, pour tout réel λ strictement positif, l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leq\frac{\lambda^p}{p}\sum_{i=1}^n x_i^p+\frac{1}{q\lambda^q}\sum_{i=1}^n y_i^q$$

2.a. Soient a et b deux réels strictement positifs.
Déterminer le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$v(x)=a\frac{x^p}{p}+\frac{b}{qx^q}$$

2.b. En déduire pour tout couple de n-uplets de réels positifs $(x_1,..x_n)$, $(y_1,..y_n)$ l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leq(\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}.(\sum_{i=1}^n y_i^q)^{1/q}$$