Banque « Agro »
A et AE - 0202

MATHÉMATIQUES
Épreuve A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME I

Pour toute application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on note $g^2 = gog$ et $\ker g$ le noyau de g. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans tout le problème, f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I.1. Montrer que 1 est valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ? Donner un vecteur propre ε_1 de troisième composante égale à 1.

I.2. Déterminer toutes les valeurs propres de f (on pourra montrer qu'elles sont racines du polynôme $A(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ et factoriser ce polynôme) et les sous-espaces propres associés. f est-elle diagonalisable ?

I.3. **a)** Montrer qu'il existe un unique vecteur ε_2 de troisième composante égale à 0 tel que $f(\varepsilon_2) - \varepsilon_2 = \varepsilon_1$.
b) Montrer que ε_1 et ε_2 appartiennent au noyau V de $(f - \mathrm{Id})^2$.
c) Déterminer ε_3, élément de $\ker(f + 3\mathrm{Id})$, de troisième composante égale à 1.

I.4. **a)** Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$; donner une base de V.
b) Déterminer la matrice N de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
c) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et son inverse, P^{-1}.

I.5. On considère trois fonctions u, v, w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles :

$$(\mathbf{S}) \qquad \begin{cases} u'(t) = -u(t) + 5v(t) - 3w(t) \\ v'(t) = u(t) \\ w'(t) = v(t) \end{cases}$$

T.S.V.P.

a) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $g(t) = (u(t), v(t), w(t))$. On rappelle que $g'(t) = (u'(t), v'(t), w'(t))$.
Montrer que le système **(S)** équivaut à l'équation différentielle **(E)** : $g'(t) = f(g(t))$.

b) Soient $(a(t), b(t), c(t))$ les coordonnées de $g(t)$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Montrer que l'équation différentielle **(E)** équivaut au système

$$\textbf{(S')} \qquad \begin{cases} a'(t) = a(t) + b(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = -3c(t) \end{cases}$$

c) On suppose $u(0) = 0, v(0) = 0, w(0) = 1$. Calculer $(a(0), b(0), c(0))$.

d) Résoudre **(S')** avec les conditions initiales $a(0), b(0), c(0)$ trouvées à la question (c). En déduire la solution de **(S)** vérifiant les conditions initiales $u(0) = 0, v(0) = 0, w(0) = 1$.

PROBLÈME II

Dans toute ce problème p désigne un réel strictement positif et f la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $f(t) = t^p + pt$.

II.1. **a)** Etablir le tableau de variation de f; montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) Tracer sommairement le graphe de f selon que $p > 1$, $p = 1$ ou $0 < p < 1$, en faisant figurer la tangente à l'origine sur chacun des graphes.

Dans la suite du problème g désigne la fonction réciproque de f.

II.2. **a)** Déterminer (sans calcul) le tableau de variation de g.

b) Justifier la dérivabilité de g en tout point $x > 0$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$;

c) Montrer que g est dérivable en 0 et préciser le nombre dérivé $g'(0)$.

d) Dans cette question on suppose $p > 1$. Montrer que $g(x) \sim x^{\frac{1}{p}}$ lorsque $x \to +\infty$ (On pourra effectuer le changement de variable $x = f(t)$).

Dans la suite du problème a désigne un réel strictement positif fixé et on note :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^{*+},\ \varphi(t) = \frac{(p-1)t^p + a}{p(t^{p-1} + 1)}$$

II.3. **a)** Montrer que si $0 < p < 1$ on peut prolonger φ par continuité au point $t = 0$.

Dans la suite du problème, lorque $0 < p < 1$, on notera φ l'application prolongée par continuité par $\varphi(0) = 0$.

b) Montrer que pour tout $t > 0$, on a : $\varphi(t) - t = \dfrac{a - f(t)}{f'(t)}$; en déduire le signe de $\varphi(t) - t$ selon la valeur de t.

c) Montrer que φ admet $t = g(a)$ comme unique point fixe si $p > 1$, et $t = g(a), t = 0$ comme seuls points fixes si $0 < p < 1$.

d) Déterminer le tableau de variation de φ ; vérifier que $\varphi(t)$ est minimum au point $t = g(a)$ si $p > 1$, et maximum en ce point si $p < 1$.

Dans la suite du problème on considère une suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de réels, satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

II.4. Dans cette question on suppose $0 < p < 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique $t_0 > g(a)$ tel que $\varphi(t_0) = 0$ et le calculer.

b) Montrer que $\varphi([0, t_0]) = [0, g(a)]$ et $\varphi([t_0, +\infty[) = \mathbb{R}^-$. Pour quelles valeurs de u_0 le terme u_n est-il bien défini pour tout n de $\mathbb{N}$?

c) On choisit $0 < u_0 < t_0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n = 0$ si $u_0 \leq g(a)$, et du rang $n = 1$ si $g(a) < u_0 < t_0$.

d) On se place dans les hypothèses du II.4.c. ; montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

II. 5. Dans cette question et dans la suivante on suppose $p > 1$ et $u_0 = \dfrac{a}{p}$.

a) Vérifier que $g(a) < \dfrac{a}{p}$.

b) Montrer que pour tout $t \in [g(a), \dfrac{a}{p}]$, on a la majoration : $|\varphi'(t)| \leq \dfrac{p-1}{p}$

Indication : On pourra remarquer que $0 \leq t^p + pt - a \leq t^p$ sur l'intervalle considéré.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$\forall n \in N, \qquad |u_{n+1} - g(a)| \leq \left(\frac{p-1}{p}\right) |u_n - g(a)|$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - g(a)| \leq (\dfrac{p-1}{p})^n |u_0 - g(a)|$

II.6. Application : dans cette question, on suppose $p = 2$, $a = 3$ et $u_0 = \dfrac{a}{p}$.

a) Déterminer les sept premières valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((\dfrac{p-1}{p})^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Déterminer $g(a)$ et donner les valeurs de $|u_n - g(a)|$ pour $0 \leq n \leq 6$ et les valeurs correspondantes pour la majoration attendue $(\dfrac{p-1}{p})^n |u_0 - g(a)|$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}$, on note m le rang minimal pour lequel $|u_m - g(a)| \leq 10^{-N}$
Déterminer la valeur de m pour $N = 5$, puis pour $N = 10$.
Lequel des encadrements suivants vous semble correct pour $N = 512$:

$$m \in [0, 6], \; m \in [10, 20], \; m \in [30, 100], \; m \in [150, 520]$$

et justifier votre réponse sans faire appel au calcul explicite des termes mentionnés.

FIN