Mathématiques A

(durée : 3 h 30)

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Considérons la matrice A appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. **Diagonalisation de A**
   a) Déterminer les valeurs propres de A.
   Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de A ? *Justifier la réponse.*
   b) Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.
   c) Déterminer une matrice P appartenant à $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec α, β, γ trois nombres réels tels que $\alpha > \beta > \gamma$.
   Les coefficients de la dernière ligne de P seront choisis égaux à 1.
2. **Calcul des puissances successives de A**
   a) Calculer P^{-1}. *Le détail des calculs devra figurer sur la copie.*
   b) Démontrer que, pout tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   c) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n.
3. **Étude d'une suite matricielle**
   Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Nous définissons la suite matricielle $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B. \end{cases}$$

   a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E.
   Considérons les endomorphismes a et b de E définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$.

i. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
Démontrer que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.

ii. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a)$ dans E.
- Démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ appartenant à E, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{g}$ appartenant à G tel que $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g})$.
- Nous pouvons alors définir une application ℓ de E dans E qui, à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ appartenant à E, associe l'unique vecteur $\overrightarrow{g}$ appartenant à G tel que l'on ait $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g})$.
Démontrer que ℓ est un endomorphisme de E tel que $(\mathrm{Id}_E - a) \circ \ell = b$.
- En déduire l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $L = AL + B$.

iii. Énoncer alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

b) Dans cette question, nous supposons l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

i. Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

ii. Exprimer, pour tout entier naturel n, X_n en fonction de A, n, L et X_0.

4. **Un exemple**
Dans cette question, nous choisissons

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E.
Considérons l'endomorphisme a de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$.
Démontrer que pour qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ appartienne à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.

b) Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

c) Déterminer, par le calcul, une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$. *On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls.*
À partir de cette matrice L', déterminer une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

d) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Déterminer l'expression des coefficients de la matrice X_n et démontrer que chacun des coefficients a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
On posera $X_0 = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix}$ *et on exprimera ces limites à l'aide des coefficients de la matrice* X_0.

Problème 2
Étude d'une équation fonctionnelle

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

1. **Un premier cas particulier**

   Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

   a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

   i. Calculer $f(0)$.

   ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.

   iii. En déduire la fonction f.

   b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

2. **Un second cas particulier**

   Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

   a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

   i. Calculer $f(0)$.

   ii. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.

   iii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et e^x. Calculer $f'(0)$.

   iv. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x, $f'(x)$ et e^x.

   v. Démontrer alors que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

   vi. En déduire la fonction f.

   b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

3. **Résolution de l'équation homogène**

   Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est l'application nulle.

   On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) **Calcul des dérivées successives de f**

i. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.

ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

iii. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

iv. En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) Soit A un nombre réel strictement positif.

i. Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que

$$\forall x \in [-A; A], \qquad |f(x)| \leqslant M$$

et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in [-A; A], \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M.$$

ii. Soit x un nombre réel appartenant à $[-A; A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$|f(x)| \leqslant M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

et en déduire que $f(x) = 0$.

d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

4. **Étude de l'équation complète**

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1; 1]$ et φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

b) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

FIN DE L'ÉPREUVE