51AZ7

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-A

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Les trois parties du problème sont indépendantes. On pourra traiter certaines questions en admettant les résultats des questions précédentes. On justifiera toutes les réponses. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Dans tout le problème, toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles. On note :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$.
- C l'ensemble $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^2$.
- K la fonction définie sur C à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$K(x,y) = \begin{cases} \sin x \cos y & \text{si } x \leq y, \\ \cos x \sin y & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Première partie

Pour tout y de $[0, \frac{\pi}{2}]$ on définit la fonction φ_y par :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \varphi_y(x) = K(x, y).$$

1. Comparer $K(x, y)$ et $K(y, x)$ pour $(x, y) \in C$.
   Montrer que K est continue sur C.

2. Pour $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que φ_y appartient à E.
   Est-elle dérivable en tout point de $[0, \frac{\pi}{2}]$?
   Étudier les variations et tracer sommairement le graphe de chacune des trois fonctions φ_0, $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$ et enfin φ_y pour une valeur de y quelconque appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. Déterminer la valeur des nombres m et M définis par les relations:

$$m = \inf_{(x,y)\in C} K(x, y) \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{(x,y)\in C} K(x, y)\ ,$$

   et préciser les points de C où ces valeurs sont atteintes.

4. Calculer dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ le volume limité d'une part par le plan d'équation $z = 0$ et d'autre part par la surface d'équation $z = K(x, y)$.

5. Soit $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $\psi_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire et périodique de période π telle que :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \psi_y(x) = \varphi_y(x).$$

   En déduire, pour tout (x, y) appartenant à C, l'égalité suivante :

$$K(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx \sin 2ny}{4n^2 - 1}.$$

Deuxième partie

Pour toute $f \in E$, on définit sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction Lf par la relation :

$$Lf(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x, t) f(t)\, dt\ .$$

1. Montrer que $L : f \longmapsto Lf$ est un endomorphisme de E.

2. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, décomposer l'intégrale définissant $Lf(x)$ en deux intégrales sur $[0, x]$ et $[x, \frac{\pi}{2}]$ respectivement.
   En déduire que, pour toute f de E, la fonction Lf est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Exprimer $(Lf)''$ à l'aide de Lf et de f.
   Préciser les valeurs $Lf(0)$ et $Lf(\frac{\pi}{2})$.

4. Déterminer le noyau de l'endomorphisme L. L'endomorphisme L est-il injectif?
   Est-il surjectif?

5. Soit λ un réel non nul.
   Démontrer la proposition suivante :
   si $f \in E$ vérifie $Lf = \lambda f$ alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre deux que l'on précisera.
   En déduire toutes les valeurs propres et tous les sous-espaces propres de L.

Troisième partie

Soit $f \in E$. On considère l'équation différentielle :

$$(Eq) \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad y''(x) + y(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'ensemble des fonctions appartenant à E du type $x \longmapsto P_1(x)\cos x + P_2(x)\sin x$ où P_1 et P_2 sont des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ et à coefficients réels.

1. Dans cette question 1, f est la fonction de E définie par

   $$x \longmapsto x + 1.$$

   Résoudre l'équation différentielle (Eq) correspondante.
   Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$?
   Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E stable par dérivation.
   Si $y \in F_n$, que peut-on dire de $y'' + y$?

3. Dans cette question 3, f est la fonction de E définie par

   $$x \longmapsto (x - 1)\sin x.$$

Déterminer une solution de l'équation différentielle (Eq) appartenant à F_n, avec n bien choisi.
En déduire la solution générale de (Eq).
Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$?
Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$?

4. Dans cette question et les suivantes, f est une fonction quelconque de E.
Soit y une solution de l'équation (Eq) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On suppose qu'il existe A et B deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ les deux relations :
$$\begin{aligned} A(x)\cos x + B(x)\sin x &= y(x) , \\ A'(x)\cos x + B'(x)\sin x &= 0 . \end{aligned}$$
Calculer $A(x)$ et $B(x)$.
En déduire que $y(x)$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, peut s'écrire sous la forme suivante :
$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\, dt + C_1 \cos x + C_2 \sin x ,$$
où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.
Montrer que l'on a ainsi obtenu toutes les solutions de l'équation (Eq) sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Montrer que l'équation (Eq) admet une solution unique y_0 vérifiant :
$$y_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_0(\frac{\pi}{2}) = 0.$$
Montrer que $y_0(x)$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, peut s'écrire sous la forme suivante :
$$y_0(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t) f(t)\, dt.$$

6. Montrer que l'équation (Eq) admet au moins une solution y_1 vérifiant :
$$y_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0,$$
si, et seulement si, la fonction f vérifie la condition: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt = 0.$
On suppose cette condition vérifiée. Soit y_1 une telle solution.
Montrer que $y_1(x)$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, peut s'écrire sous la forme suivante :
$$y_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(x,t) f(t)\, dt + C_3\, \Phi(x) \quad \text{avec} \quad C_3 \in \mathbb{R} ,$$
où l'on précisera les fonctions H et Φ.