$\star$ Banque filière PT $\star$

Epreuve de Mathématiques I-A

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Toutes les réponses seront justifiées
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Les quatre parties sont largement indépendantes

Partie 1

Soit la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ dont le terme général est défini pour $n \geqslant 1$ et dans laquelle z désigne la variable complexe.

Question 1

a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

b) Est-elle convergente pour $z = 1$? Pour $z = -1$?

Question 2

Pour x réel vérifiant $|x| < R$, on note $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

a) Calculer $S'(x)$.

b) En déduire $S(x)$.

Question 3

Etudier la convergence des séries numériques $\sum \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}\right)$ et $\sum \left(\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}\right)$, où p est entier positif ou nul.

La série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge-t-elle pour $z = e^{2i\pi/3}$? Indication : on pourra représenter z^{3p+1}, z^{3p+2} ainsi que z^{3p+3} dans le plan complexe.

Question 4

a) Pour tout réel θ tel que $e^{i\theta}$ est différent de 1, calculer la somme $\sum\limits_{k=p}^{k=q} e^{ik\theta}$ pour p et q entiers strictement positifs vérifiant $p < q$.

b) Vérifier que cette expression est bornée lorsque $e^{i\theta}$ est différent de 1.

c) Soit u_n une suite de nombres réels tendant vers 0 et vérifiant de plus la propriété suivante : la série de terme général $|u_{n+1} - u_n|$ est convergente. Soit v_n une suite de nombres complexes pour laquelle il existe un réel M fini tel que, pour tous entiers strictement positifs p et q, avec $p < q$, on a $\left|\sum\limits_{k=p}^{k=q} v_k\right| \leqslant M$. On admet la propriété suivante : la série de terme général $u_n v_n$ converge.

Etudier la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ lorsque z est un nombre complexe différent de 1 et de module égal à 1.

Partie 2

Soit $\mathcal{P}$ le sous-ensemble du plan complexe $\mathbb{C}$ défini par $\Re z > 0$.
Pour tout z de $\mathcal{P}$, on désigne par $\operatorname{Arg} z$ l'unique argument de z qui appartient à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.
On note alors F la fonction définie sur $\mathcal{P}$ par la relation $F(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$.

Question 1

Pour tout z de $\mathcal{P}$, calculer $e^{F(z)}$.

Question 2

Pour tout z de $\mathcal{P}$ écrit sous la forme $z = x+iy$, avec x réel strictement positif et y réel, on pose $P(x,y) = \Re F(z)$ et $Q(x,y) = \Im F(z)$.

a) Exprimer Q à l'aide de la fonction Arctan.

b) Calculer $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

c) Pour toute fonction φ de classe C^2 d'un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit le laplacien $\Delta\varphi$ de φ par la relation $\Delta\varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}$.
Calculer ΔP et ΔQ.

d) Soit γ une courbe fermée sans point double, orientée, de classe C^1 et contenue dans $\mathcal{P}$.
En se ramenant à des intégrales doubles, calculer les intégrales $\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x - Q(x,y)\,\mathrm{d}y$
et $\int_\gamma Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Question 3

a) A-t-on la relation $1 - z \in \mathcal{P}$ dès que z est un nombre complexe différent de 1 et de module inférieur ou égal à 1 ?

b) On admet que pour tout z du plan complexe $\mathbb{C}$ différent de 1 et de module inférieur ou égal à 1, on a la relation : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n} = -F(1-z)$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ en fonction de θ pour tout θ de $]0, 2\pi[$.

Partie 3

Soit θ un réel donné appartenant à $]0, \pi[$.
Soit f la fonction de la variable réelle périodique de période 2π, paire, définie sur $[0, \pi]$ par les relations : $f(x) = 1$ pour $x \in [0, \theta[$, $f(\theta) = 1/2$, $f(x) = 0$ pour $x \in]\theta, \pi]$.

a) Représenter graphiquement f sur $[-\pi, 2\pi]$.

b) Déterminer la série de Fourier de f.

c) Etudier la convergence de cette série de Fourier.

d) En déduire directement la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0, \pi[$, puis pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Partie 4

Soit g la fonction réelle de la variable réelle, 2π-périodique, définie par $g(0) = 0$ et par $g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour tout x dans $]0, 2\pi[$.

Question 1

a) Représenter graphiquement g sur $[-4\pi, 4\pi]$.

b) Déterminer la série de Fourier de g.

Question 2

a) Etudier la convergence de cette série.

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{2p+1}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Question 3

a) En utilisant par exemple le resultat obtenu en 1.4.a), exprimer en fonction de n et de θ la somme finie $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \cos k\theta$.

b) Pour x réel, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{\sin(kx)}{k}$. Etablir que, pour tout x de $]0, \pi[$, on a la relation :

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ \mathrm{d}t.$$

c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Soit h_n une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{h_n} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{h_n} \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}\right)\ \mathrm{d}t$.

d) On désigne par x_n le plus petit réel strictement positif qui réalise un maximum relatif de $S_n(x)$.
Montrer simultanément que $S_n(x_n)$ tend vers une limite lorsque n tend vers l'infini et que cette limite L peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$ pour un réel α que l'on déterminera.

e) On propose une valeur approchée de l'intégrale L sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{k=4} \dfrac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$.

Commet-on une erreur inférieure en valeur absolue à 10^{-3} ?