Mines PSI 1

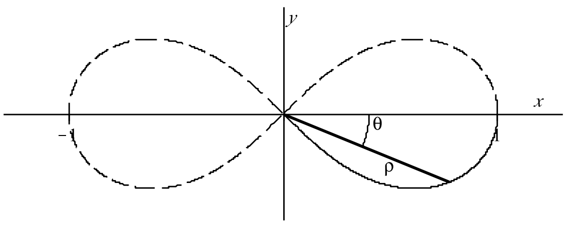
Le sinus lemniscatique

Dans ce texte, on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1 La lemniscate de Bernoulli.

La lemniscate de Bernoulli (voir la figure ci-dessous) est une courbe elliptique particulièrement simple d'équation implicite

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \tag{1}$$



Q.1. Déterminer dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \leq 0$, une équation polaire de la lemniscate sous la forme $\rho = g(\theta)$ où la fonction g est définie sur l'intervalle $[-\pi/4, 0]$. Préciser les symétries permettant de recouvrer l'ensemble de la courbe.

Q.2. Montrer que g constitue une bijection de $[-\pi/4, 0]$ sur $[0, 1]$.

Q.3. Déterminer les tangentes à la lemniscate en $(0, 0)$.

Q.4. Déterminer dans le demi-plan $x \geq 0$, une équation paramétrique de la lemniscate en fonction de ρ et en déduire que l'abscisse curviligne s vérifie l'équation différentielle suivante sur $[0, 1]$:

$$s'(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^4}} \tag{2}$$

2 Le sinus lemniscatique.

Q.5. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ converge. On note

$$\sigma = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \tag{3}$$

Q.6. Que représente σ ?

On définit la fonction F sur l'intervalle $[-1, 1]$ par l'expression suivante :

$$F(x) = \int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \tag{4}$$

Q.7. Montrer que la fonction F est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Q.8. Dessiner le graphe de F et en préciser le tableau de variations.
Q.9. Montrer que F est développable en série entière sur $]-1,1[$.
Q.10. Donner l'expression des coefficients a_n de cette série.
Q.11. Montrer que la série de terme général a_n converge (on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$) et a pour somme σ.
Q.12. Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1}, continue et impaire sur $[-\sigma,\sigma]$.
Q.13. Montrer que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\sigma,\sigma[$, calculer sa dérivée, en déduire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma,\sigma]$.

On prolonge la fonction F^{-1} à $[-\sigma, 3\sigma]$ en opérant sur son graphe une symétrie par rapport à la droite $x=\sigma$, puis on prolonge F^{-1} à $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité, on note `sl` la fonction ainsi construite.

Q.14. Montrer que `sl` est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée `sl'` en fonction de `sl`.
Q.15. Tracer le graphe de `sl` sur $[-3\sigma,\sigma]$.

3 Equation différentielle.

Q.16. Montrer que `sl` est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$

$$\mathtt{sl}''(x) + 2\mathtt{sl}^3(x) = 0 \tag{5}$$

Soit f une solution de (5) sur $\mathbb{R}$.

Q.17. Montrer que la fonction H définie par

$$H(x) = f'(x)^2 + f(x)^4 \tag{6}$$

est constante sur $\mathbb{R}$. On note encore H cette constante.

On choisit désormais de considérer le cas où $H>0$, et on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = F(H^{-1/4} f(x)) \tag{7}$$

où F a été définie à la formule (4).

Q.18. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ où f' ne s'annule pas et calculer alors sa dérivée. En déduire qu'il existe une constante $b\in\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = H^{1/4}\mathtt{sl}(H^{1/4}x + b) \tag{8}$$

pour tout $x \in]\alpha,\beta[$.

Q.19. En déduire que f' s'annule au moins une fois sur tout intervalle ouvert de longueur supérieure à $2\sigma H^{-1/4}$.
Q.20. Soit x_0 une racine de f', démontrer que $f''(x_0)\neq 0$ et en déduire l'existence de u_1 et u_2, $u_1 < x_0 < u_2$, tels que f' ne s'annule pas sur $]u_1,x_0[\cup]x_0,u_2[$.
Q.21. Démontrer l'existence de $x_1 = \inf\{x > x_0 / \ f'(x) = 0\}$. Montrer que $x_1 > x_0$ et $f'(x_1) = 0$. En déduire la valeur de $x_1 - x_0$.
Q.22. De même on pose $x_{-1} = \sup\{x < x_0 / \ f'(x) = 0\}$. Montrer que f vérifie (8) pour tout $x\in]x_{-1},x_1[$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4 Le calcul trigonométrique généralisé.

La fonction `cl` est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathtt{cl}(x) = \frac{\mathtt{sl}'(x)}{1+\mathtt{sl}^2(x)} \tag{9}$$

Q.23. Montrer que pour tout x réel on a

$$\mathtt{sl}^2(x) + \mathtt{cl}^2(x) = 1 - \mathtt{sl}^2(x)\mathtt{cl}^2(x) \tag{10}$$

Q.24. Calculer la fonction dérivée $\mathtt{cl}'$ de la fonction $\mathtt{cl}$ et en déduire que $\mathtt{cl}$ vérifie l'équation différentielle (5).

Q.25. Montrer que pour tout x réel on a

$$\mathtt{cl}(x) = \mathtt{sl}(\sigma - x) \tag{11}$$

On définit la fonction G sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$G(x, y) = \frac{\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(y) + \mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}'(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y)}$$

Q.26. Montrer que G vérifie l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}$$

en déduire que pour tout a dans $\mathbb{R}$, G est constante le long de la droite d'équation $x + y = a$.

Q.27. Montrer que

$$\mathtt{sl}(x + y) = G(x, y)$$

et en déduire une formule d'addition pour la fonction $\mathtt{sl}$, c'est à dire une expression de $\mathtt{sl}(x+y)$ ne faisant intervenir que $\mathtt{sl}(x)$, $\mathtt{sl}(y)$, $\mathtt{cl}(x)$ et $\mathtt{cl}(y)$.

Q.28. Démontrer la formule de Fagnano, valable dans un intervalle $[-\alpha, \alpha]$ que l'on précisera :

$$2\int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \tag{12}$$