Banque « Agro–Véto »
2004/2005

Agro 2005 (Épreuve B)
4 mai 2005 (08 h 30 - 12 h 00)

Mathématiques B

(durée : 3 h 30)

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
Le sujet compte 5 pages. Les trois parties du problème sont mutuellement indépendantes.

Première partie : Jeu du craps

I. 1. Étude du jet simultané de deux dés non pipés

On note $\Omega = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 6\}$ l'ensemble des résultats possibles.
On munit Ω de la probabilité uniforme.
On note S la variable aléatoire définie sur Ω par $S(x, y) = x + y$.

a) Décrire complètement la loi de probabilité de S et calculer son espérance $E(S)$ et sa variance $V(S)$.

b) Vérifier que, pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 7$,

$$P[S = 14 - k] = P[S = k] = \frac{k-1}{36}\cdot$$

c) Vérifier que, pour tout entier k vérifiant $7 \leqslant k \leqslant 12$,

$$P[S = 14 - k] = P[S = k] = \frac{13-k}{36}\cdot$$

d) Calculer la probabilité $P[S \notin \{k; 7\}]$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$ puis pour $k \in \{8; 9; 10\}$.

I. 2. Le craps

Le jeu du craps, jeu à 1 joueur très populaire aux États-Unis, est une succession de jets simultanés de 2 dés discernables, par exemple de couleurs différentes, non pipés.
On considère les jets comme des épreuves indépendantes ; pour chaque jet, l'espace des événements est $\Omega = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 6\}$ muni de la probabilité uniforme.
À chaque jet, le résultat est une variable aléatoire suivant la loi de S, variable définie au I. 1.
On le notera S, sans risque de confusion.
La règle du jeu est la suivante :

- Le premier jet est particulier :
  - Si $S = 7$ ou 11, le joueur gagne.
  - Si $S = 2$, 3 ou 12, le joueur perd.
  - Si $S = 4$, 5, 6, 8, 9 ou 10, le joueur reprend les dés et effectue un second jet. Dans ce cas, on note $k \in \{4; 5; 6; 8; 9; 10\}$ le résultat du premier jet.
- À partir de là, le joueur relance les dés :
  - Si $S = k$, le joueur gagne.
  - Si $S = 7$, le joueur perd.
  - Sinon, il reprend les dés et effectue le jet suivant.
- L'objectif du joueur est de reproduire la valeur k avant de réaliser la valeur 7.

a) Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{4; 5; 6\}$. On suppose que lors du premier jet le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, la probabilité de l'événement « le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ème jet » vaut

$$\frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2}.$$

b) En déduire que si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet vaut

$$P(D_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36}\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} = \frac{k-1}{k+5}\cdot$$

c) Soient n un naturel non nul et $k \in \{8; 9; 10\}$. On suppose que, dans la première phase, le joueur a réalisé l'événement $[S_1 = k]$. Calculer la probabilité que le joueur gagne à partir du second jet.

d) Soit G' l'événement « le joueur gagne au premier jet ». Déterminer la probabilité de G'.

e) Soit G'' l'événement « le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet ». Montrer que

$$P(G'') = 2\sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{k+5}\,\frac{k-1}{36}\cdot$$

f) Soit G l'événement « le joueur gagne ». Montrer que $G = G' \cup G''$, calculer $P(G)$ et vérifier que le craps n'est pas un jeu trop « voleur », c'est-à-dire que la probabilité pour que le joueur de gagner est très peu inférieure à $0,5$.

Deuxième partie : Un jeu en famille (finie)

Plusieurs joueurs, nommés J_1, J_2, ..., J_k, ... jouent l'un après l'autre, dans l'ordre des indices. À chaque joueur J_1, J_2, ..., J_k, ... est imparti un événement précis A_1, A_2, ..., A_k, ... Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement aléatoire qui lui est imparti, auquel cas il gagne. Lorsqu'aucun n'a gagné, on recommence un tour et on continue ainsi jusqu'à ce que l'un des joueurs gagne. Ainsi un joueur qui n'a pas gagné à son tour peut avoir à nouveau la « main » et n'est pas (immédiatement) éliminé.

On désignera par p_k la probabilité, non nulle, pour le joueur J_k de réaliser l'événement A_k quand il a la « main ». On posera $q_k = 1 - p_k$ et $q_0 = 1$. L'événement « J_k gagne » sera noté G_k et on supposera l'indépendance, mutuelle a priori, de toutes les suites de résultats des coups joués par les concurrents jusqu'à la fin de la partie si tant est qu'elle se termine.

II. 1. Entre deux joueurs

a) Remarquer que J_1 ne peut jouer qu'aux rangs impairs et J_2 aux rangs pairs. En déduire que

$$P(G_1) = \sum_{n=0}^{\infty}(q_1q_2)^n p_1 = \frac{p_1}{1-q_1q_2} \qquad \text{et} \qquad P(G_2) = \sum_{n=0}^{\infty}(q_1q_2)^n q_1p_2 = \frac{q_1p_2}{1-q_1q_2}\cdot$$

Calculer $P(G_1) + P(G_2)$ et vérifier que le jeu se termine de façon certaine (avec probabilité 1) au bout d'un nombre fini de coups.

b) On désigne par T la variable aléatoire égale au nombre de coups joués jusqu'à la fin du jeu. Montrer que l'espérance de T vérifie

$$E(T) = \frac{2-p_1}{1-q_1q_2}\cdot$$

c) On dit que le jeu est équitable si $P(G_1) = P(G_2) = 1/2$. Montrer que le jeu est équitable si, et seulement si, $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}\cdot$

d) Exprimer $E(T)$ dans le cas où le jeu est équitable et vérifier que dans ce cas

$$E(T) = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}\cdot$$

II. 2. Entre c joueurs

a) Expliquer pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{1; 2; \ldots; c\}$, le joueur J_k ne peut éventuellement jouer (et gagner) qu'aux rangs $cn + k$ et que

$$P(G_k) = q_0 \cdots q_{k-1} p_k \sum_{n=0}^{\infty} (q_0 \cdots q_c)^n = \frac{q_0 \cdots q_{k-1}}{1 - q_0 \cdots q_c} p_k.$$

b) Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{c} q_0 \cdots q_{k-1} p_k + q_0 \cdots q_c = 1.$$

En déduire que le jeu se termine de façon certaine (avec probabilité 1) au bout d'un nombre fini de coups.

c) On dit que le jeu est équitable si $P(G_1) = \cdots = P(G_c) = 1/c$. Montrer que le jeu est équitable si, pour tout $k \in \{1; \ldots; c-1\}$, on a la relation $p_{k+1} = \dfrac{p_k}{1 - p_k}\cdot$

d) On pose $r_k = 1/p_k$. En supposant le jeu équitable, exprimer r_{k+1} en fonction de r_k puis p_k en fonction de p_1. En déduire que si le jeu est équitable alors $p_1 \leqslant 1/c$. Déterminer p_c quand le jeu est équitable et $p_1 = 1/c$.

e) La variable T étant définie comme dans II. 1. b), montrer, toujours dans le cas d'équitabilité, que

$$E(T) = \frac{1}{p_1} - \frac{c-1}{2}\cdot$$

On pourra remarquer que $q_0 \cdots q_c = 1 - cp_1$ à l'aide de II. 2. c), puis utiliser II. 2. a) pour calculer $E(T)$.

Troisième partie : Un jeu entre une infinité de joueurs

Les notations sont celles du II. On suppose qu'il y a une infinité de joueurs. Ainsi un joueur qui n'a pas gagné à son tour est nécessairement éliminé et la « main » ne lui revient plus.

On pose $q_0 = 1$.

III. 1. a) Montrer que dans ce cas, le eju ne peut pas équitable et que, pour tout n entier naturel non nul, on a $P(G_n) = q_0 \cdots q_{n-1} p_n = q_0 \cdots q_{n-1} - q_0 \cdots q_n$.

b) On considère la suite définie par $Q_n = q_0 \cdots q_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite est strictement décroissante et convergente vers un réel a tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.

c) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} P(G_k) = 1 - Q_n$$

et en déduire que :

- si $a \neq 0$, le jeu a une probabilité non nulle de ne pas se terminer ;
- si $a = 0$, le jeu se termine avec probabilité 1.

III. 2. a) Soit p un réel tel que $0 < p < 1$ et soit $q = 1 - p$. On pose, pour tout naturel $n > 0$, $p_n = p$.

α] Exprimer Q_n en fonction de q et donner la limite de la suite de terme général Q_n.

β] En déduire que le jeu se termine avec probabilité 1.

γ] Soit N le nombre de concurrents ayant joué lorsque le jeu se termine (N représente aussi le rang du joueur gagnant). Donner la loi de probabilité de N, son espérance et sa variance.

b) On suppose que, pour tout $n > 0$, $p_n = 1/(n+1)$. Déterminer Q_n et sa limite. Le jeu peut-il ne pas se terminer ? Que peut-on dire de l'espérance éventuelle de N ?

c) On suppose que, pour tout $n > 0$, $q_n = 1/(n+1)$. Déterminer Q_n et calculer $E(N)$.

d) On suppose que, pour tout $n > 0$, $q_n = \exp\{-1/(n(n+1))\}$. Déterminer Q_n, sa limite et la probabilité que le jeu ne se termine jamais. *On pourra utiliser le relation, valable pour tout $n > 0$,* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\cdot$

FIN