Banque « Agro-Véto »
A - 0506

MATHÉMATIQUES B

Durée : 3 heures 30 minutes.

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois parties du problème sont indépendantes si, pour traiter la partie III, on admet le lemme II.4.

Objectifs.
L'objectif du problème est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T on agit comme suit :
1) On prélève une cellule unique C_0 à laquelle on applique T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre naturel aléatoire D_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfant(s) de C_0 ou descendant(s) de première génération de C_0 lorsque $D_1 > 0$; si $D_1 = 0$ (ce que l'on souhaite), le traitement est terminé.
2) Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geqslant 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera le même que celui de C_0 et ceci indépendamment les uns des autres lorsque $k > 1$.
3) À l'issue de cette deuxième étape, on obtiendra un nombre naturel aléatoire D_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $D_2 = 0$, on s'arrête, sinon, on poursuit dans les mêmes conditions et, pour $n \geqslant 1$, on notera D_n le nombre de descendant(s) de n-ième génération tant que $D_n > 0$.

Remarque $(*)$: les cellules de $(n+1)$-ième génération de C_0 sont celles de n-ième génération de l'ensemble des enfants de C_0.

Notations
- On notera conventionnellement $D_0 = 1$.
- On notera $p_k = P[D_1 = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$ (p_k représente donc la probabilité pour une cellule quelconque C d'avoir k enfants, étant entendu qu'on utilisera la même variable aléatoire pour toutes les cellules sauf en cas d'ambiguïté). On supposera bien entendu $0 < p_0 < 1$ et on aura $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.
- On notera $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P[D_n = 0]$. Lorsque $\lim u_n = 1$ c'est-à-dire lorsque avec probabilité 1 la descendance de C_0 s'éteint au bout d'un nombre fini de générations on dira que T est efficace. On désignera par G le nombre aléatoire de générations de descendants de C_0. Ainsi
  si C_0 n'a pas d'enfant ($D_1 = 0$), alors $G = 0$;
  si $D_1 > 0$ et $D_2 = 0$, alors $G = 1$;
  si d'une façon générale, pour $n_0 \geqslant 1$, $D_{n_0-1} > 0$ et $D_{n_0} = 0$, alors $G = n_0 - 1$.
- On notera $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle X. Pour deux événements A et B avec $P(B) \neq 0$, $P[A|B]$ désignera la probabilité conditionnelle de A sachant B.

I Un premier exemple.

I.1. La loi de D_1 est définie par $p_0 > 0$ et $p_1 > 0$ tels que $p_0 + p_1 = 1$.

I.1.a) Calculer u_0 et u_1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, D_n ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

I.1.b) Montrer que s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $D_n = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, $D_{n+k} = 0$.

I.2.a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0] = P[D_{n+1}=0|D_1=0]\,p_0 + P[D_{n+1}=0|D_1=1]\,p_1$$

puis en utilisant la remarque $(*)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0|D_1=0]=u_n$ et enfin que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=p_0+p_1u_n$.

I.2.b) En posant $v_n = 1-u_n$, montrer que $u_n = 1-p_1^n$ et en déduire la limite de u_n.

I.2.c) Montrer que $P[G>n] = 1-u_{n+1} = p_1^{n+1}$ puis que $P[G=n]=p_0p_1^n$ et enfin que $E(G)=p_1/p_0$.

II Deuxième exemple.

II.1. La loi de D_1 est définie par p_0, p_1 et p_2 tels que $p_0>0$, $p_2>0$ et $p_0+p_1+p_2=1$.

II.1.a) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0||D_1=k]=u_n^k$. On utilisera notamment la remarque $(*)$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0] = \sum_{k=0}^{2} P[D_{n+1}=0|D_1=k]\,p_k = p_0+p_1u_n+p_2u_n^2.$$

II.2. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = p_0+p_1x+p_2x^2.$$

II.2.a) Vérifier que $f>0$, $f' \geqslant 0$, $f''>0$, $f(1)=1$, $f'(1)=1-p_0+p_2$.

II.2.b) Représenter le graphe de f dans les trois cas suivants : $f'(1)<1$, $f'(1)=1$ et $f'(1)>1$ (on choisira des valeurs simples de p_0, p_1, p_2 pour chaque cas).

II.2.c) Vérifier par le calcul que

i) pour $f'(1) \leqslant 1$, le graphe de f est au-dessus de la première bissectrice Δ : $(y=x)$;

ii) pour $f'(1)=1$, le graphe est tangent à Δ au point $I(1,1)$;

iii) pour $f'(1)>1$, le graphe recoupe la première bissectrice au point $L(p_0/p_2, p_0/p_2)$.

II.2.d) Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $\min(p_0/p_2, 1)$.

II.2.e) En déduire la limite de la suite de terme général u_n dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement soit efficace (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$).

II.3. Examen des différents cas.

II.3.a) Cas où $f'(1)<1$: démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-u_{n+1} \leqslant (1-u_n)f'(1)$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-u_n \leqslant (1-u_0)[f'(1)]^n$.

II.3.b) On s'intéresse au cas où $f'(1)=1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{p_0}{p_1+p_0(1+u_n)} \leqslant 1.$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k}\right) = \frac{1}{1-u_n} - 1 \leqslant n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

II.3.c) Montrer que $E(D_1)=f'(1)$ et que $P[G>n] = 1-u_{n+1} = P[D_{n+1} \neq 0]$.

II.4. Lemme : soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance $E(X)$.

II.4.1) Montrer que : $\forall N \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP[X=k] = \sum_{k=0}^{N-1} P[X>k] - NP[X>N]$.

On pourra utiliser $P[X=k] = P[X>k-1]-P[X>k]$.

II.4.2) Montrer que $\forall N \geqslant 1,\ NP[X > N] \leqslant R_N$, où $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP[X = k]$ est le reste de la série convergente $\sum kP[X = k]$ dont la somme est $\sum_{k=0}^{+\infty} kP[X = k] = E(X)$.

II.4.3) En déduire que $NP[X > N] \to 0$ quand $N \to \infty$ puis que

$$E(X) = \sum_{N=0}^{+\infty} NP[X > N].$$

II.5. Déduire de ce qui précède que :

– si $f'(1) < 1$ alors $E(G) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - u_n) \leqslant \frac{f'(1)}{1 - f'(1)}$.

– si $f'(1) = 1$ alors G n'a pas d'espérance (on utilisera le fait que la série de terme général $1/(n + 1)$ est divergente).

III Étude d'un cas où D_1 prend une infinité de valeurs.

III.1. Soit D_1 une variable aléatoire définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ P[D_1 = k] = pq^k$ avec $p > 0$, $q > 0$ et $p + q = 1$.

III.1.a) Montrer que $P[D_{n+1} = 0|D_1 = k] = u_n^k$ pour tout k entier naturel, puis que $u_{n+1} = P[D_{n+1} = 0] = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^k u_n^k = \frac{p}{1 - qu_n}$.

III.1.b) Étudier la fonction g définie par $x \mapsto g(x) = \frac{p}{1 - qx}$ pour $x \in [0, 1]$ et vérifier les propriétés suivantes de g : $g > 0$, $g' > 0$, $g'' > 0$, $g(1) = 1$ et $g'(1) = q/p$.

III.1.c) Montrer que dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$ admet les deux solutions 1 et p/q. En déduire que la limite éventuelle de u_n ne peut être que 1 ou p/q.

III.1.d) Montrer que la suite u_n est croissante et converge vers $\min(1, p/q)$.

III.2. Expression de u_n en fonction de n.

III.2.a) On suppose ici $p \neq q$. On pose $v_n = \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$. Montrer que $v_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$ puis que $u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$ et retrouver ainsi le résultat de 1-d.

III.2.b) On suppose ici que $p = q = 1/2$. Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$. On pose $w_n = \frac{1}{1 - u_n}$. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n. En déduire que $w_{n+1} = n + 1$ puis que $u_n = \frac{n}{n + 1}$ et retrouver ainsi le résultat de 1-d.

III.2.c) Calculer $E(D_1)$ et vérifier qu'elle est égale à $g'(1)$ et montrer que T est efficace si et seulement si $E(D_1) \leqslant 1$.

III.2.d) On suppose $g'(1) < 1$. Calculer $1 - u_n$ et montrer que $1 - u_n \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n = [g'(1)]^n$; en déduire que $E(G) \leqslant \frac{g'(1)}{1 - g'(1)}$.

III.2.e) On suppose $g'(1) = 1$ $(p = q)$. Montrer que $1 - u_n = \frac{1}{n + 1}$ et en déduire que G n'a pas d'espérance.

FIN.