ÉPREUVE C
Durée : 3 h

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Remarques préliminaires :

Le but de ce problème est d'étudier des méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ *en mettant en évidence des suites dont il est la limite. On pourra utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées des termes successifs des suites, mais évidemment pas pour obtenir une valeur approchée de* $\sqrt{2}$ *lui-même... On pourra par contre, utiliser, en les justifiant des encadrements usuels comme :*

$$1 < \sqrt{2} < 3/2$$

PARTIE I *Première approximation de* $\sqrt{2}$

On définit la fonction f qui à tout réel x positif ou nul associe : $x^2 - 2$. On notera C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, B son point d'intersection avec (Ox) et A le point de C d'abscisse a, où a désigne un réel strictement positif. On supposera de plus que les points A et B sont distincts.

1. Montrer qu'on peut définir par récurrence une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de C de la manière suivante :

- M_0 est un point quelconque de C distinct de A et de B.
- Pour tout n entier naturel, M_{n+1} est le point de C de même abscisse que le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la droite (AM_n)

On notera u_n l'abscisse de M_n et u la suite de terme général u_n. Montrer que l'on a, pour tout n entier naturel, la relation :

$$u_{n+1} = \frac{2+au_n}{a+u_n}$$

et que M_{n+1} est distinct de A, de B et de M_n.

2.a. Justifier, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{a-\sqrt{2}}{a+u_n}\times(u_n-\sqrt{2})$$

2.b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \le \left|1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right|\times\left|u_n-\sqrt{2}\right|$$

puis que : $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \le \left|1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right|^n\times\left|u_0-\sqrt{2}\right|$

2.c. Comment peut-on choisir a pour pouvoir en déduire que la suite u converge ? On précisera sa limite.

3. Dans cette question on suppose : $a = 1$, $u_0 = 2$.

3.a. Montrer qu'on a, pour tout entier naturel n non nul : $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

En déduire un rang n_0 à partir duquel u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.
Justifier l'encadrement :

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

3.b. Cette question est destinée à préciser la rapidité de la convergence de la suite u. Pour cela on considère la suite v définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$$

Montrer que c'est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le terme de rang 0.
En déduire :

$$v_n = (-1)^n \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2n+2}$$

puis la majoration :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq 4 \times (0{,}3)^{n+1}$$

*On dira que la convergence de u vers sa limite est **géométrique**.*

<u>PARTIE II</u> *La méthode de Newton (Algorithme de Babylone).*
On reprend la courbe C définie dans la partie précédente.

1.a. Montrer qu'il est possible de définir par récurrence une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les deux conditions :

- a_0 est un réel strictement positif.
- a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente en P_n à C, P_n désignant le point de C d'abscisse a_n. Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n.

1.b. On considère la fonction g définie, pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1.c. Montrer que, pour n non nul, a_n est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$. En déduire que, à partir du rang 1, la suite a est décroissante et admet une limite réelle.

Vérifier que cette limite est $\sqrt{2}$.

2. Cette question est destinée à préciser la rapidité de la convergence de la suite a. Pour cela, on prend : $a_0 = 1{,}5$ et on considère la suite b définie par : $b_n = \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$

2.a. Justifier la relation : $b_{n+1} = b_n^{\,2}$, pour tout entier naturel n. Déterminer une expression de b_n en fonction de n et de b_0 .
2.b. Vérifier : $b_0 \leq 0{,}04$
2.c. En déduire l'encadrement :

$$0 < a_n - \sqrt{2} \leq 3{,}5 \times (0{,}04)^{2^n}$$

On dira que la convergence de a est ***quadratique.***

2.d. En déduire un rang n_1 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

PARTIE III *Un problème de point fixe.*

Dans cette partie, on se propose de généraliser certains résultats mis en évidence dans les parties précédentes. On considèrera une fonction φ définie et de classe C^1 sur un intervalle réel $I = [a,b]$. On note m un réel tel que, pour tout x de I, on ait : $|\varphi'(x)| \leq m$ et on supposera que m est un réel strictement inférieur à 1. Enfin, on supposera qu'il existe α élément de I vérifiant la condition :

$$\varphi(\alpha) = \alpha$$

On se propose de trouver des valeurs approchées de α comme limite d'une suite et d'examiner la rapidité de la convergence de cette suite.

1. On définit par récurrence la suite u par les conditions :

- u_0 est élément d'un intervalle centré en α et inclus dans I.
- Pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

En utilisant convenablement l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est élément de I et justifier la relation, pour tout n entier naturel :

$$|u_n - \alpha| \leq (m)^n \, |u_0 - \alpha|$$

En déduire que la suite u converge vers α.

2. On suppose désormais que φ est de classe C^2 sur I et que K est un réel tel que, pour tout x de I, on ait : $|\varphi''(x)| \leq K$. Dans cette question, on fera de plus les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\varphi'(\alpha) = 0 \text{ et } \varphi''(\alpha) \neq 0$$

2.a. En écrivant une formule de Taylor-Lagrange en α pour φ, justifier :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq K \times (u_n - \alpha)^2$$

puis, pour tout n entier naturel : $|u_n - \alpha| \leq K^{2^n - 1} \, |u_0 - \alpha|^{2^n}$

2.b. En déduire que l'on peut choisir u_0 de manière à ce qu'il existe un réel strictement positif A et un réel q strictement compris entre 0 et 1 tel que : $|u_n - \alpha| \leq A\, q^{2^n}$

2.c. Application : En utilisant l'approximation de $\sqrt{2}$ trouvée dans la partie I.3.a. et en appliquant les résultats précédents à la fonction g définie dans la partie II, donner un indice n_2 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.