

Epreuve de Mathématiques I-B

durée 4h

On désigne par

\mathbb{N} : l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0,

\mathbb{R} : le corps des nombres réels,

E : l'algèbre des (fonctions) polynômes d'une variable à coefficients réels,

E_n : le sous-espace vectoriel de E formé des (fonctions) polynômes de degré inférieur ou égal à n et de la fonction nulle.

On note w l'application de $] - 1, 1[$ dans \mathbb{R} définie par : $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

PARTIE I

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ pour tout } n \geq 2.$$

1⁰) Quel est le degré de T_n ? Quel est le coefficient du terme de plus haut degré de T_n ?
Quelle est la parité de T_n ?

2⁰) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel θ ,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

3⁰) Préciser les valeurs de $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

Déterminer les zéros de T_n et les extremums locaux de T_n .

(on pourra commencer par rechercher ces zéros dans $[-1, 1]$).

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

1⁰) Soit $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

L'intégrale $\int_{-1}^1 w(x)\varphi(x) dx$ est-elle convergente?

2⁰) Pour tout couple (P, Q) de E^2 , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 w(x)P(x)Q(x) dx$$

Montrer que l'on munit ainsi E d'une structure d'espace préhilbertien.

3⁰) Calculer, pour tout couple (i, j) de \mathbb{N}^2 , $\langle T_i, T_j \rangle$.

Que conclure?

4⁰) Soit $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E vérifiant les conditions suivantes :

- i) Q_n est de degré n ,
- ii) $\langle Q_i, Q_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

a) Montrer que $(Q_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de E_{n-1} .

En déduire que Q_n est orthogonal à tout élément de E_{n-1} .

b) En déduire qu'il existe une suite de réels non nuls $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_n = \alpha_n T_n .$$

4⁰) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, et de classe C^1 par morceaux. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout x de $[-1, 1]$, on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x)$$

Comment les coefficients a_n s'expriment-ils à l'aide de f ?

(on pourra considérer la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(\theta) = f(\cos \theta)$)

PARTIE III

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $P \in E_n$, on pose

$$u_n(P)(x) = (1 - x^2)P''(x) - xP'(x)$$

où P' et P'' désignent les dérivées (respectivement première et seconde) de P .

1⁰) Montrer que $u_n : P \mapsto u_n(P)$ est un endomorphisme de E_n .

2⁰) Écrire la matrice de u_n dans la base canonique $(x^i)_{0 \leq i \leq n}$ de E_n .

En déduire les valeurs propres de u_n .

3⁰) Déterminer les sous-espaces propres de u_n , en précisant pour chacun une base.
(On remarquera que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y(\theta) = \cos(k\theta)$ est solution de $y'' + k^2y = 0$.)

4⁰) Montrer que u_n est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini dans la partie II.

PARTIE IV

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (1 - x^2)^{n-1/2}.$$

1⁰) Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f_n^{(n)}(x) = w(x) P_n(x).$$

(On pourra, par exemple, remarquer que $f_n(x) = (1 - x)^{n-1/2}(1 + x)^{n-1/2}$.)

2⁰) Déterminer les deux fonctions rationnelles R et S telles que

$$w'(x) = R(x)w(x) \text{ et } w''(x) = S(x)w(x).$$

3⁰) Montrer que :

$$(1 - x^2)f_n'(x) + (2n - 1)xf_n(x) = 0.$$

En déduire que :

$$(1 - x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 3xf_n^{(n+1)}(x) + (n^2 - 1)f_n^{(n)}(x) = 0.$$

4⁰) Montrer enfin que P_n est un vecteur propre de l'endomorphisme u_n défini en partie III.
Les deux vecteurs P_n et T_n sont-ils liés?

Tournez la page S.V.P.

PARTIE V

1⁰) $\alpha \in]0, \pi[$ étant fixé, on définit, pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\varphi_p : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par les relations :

$$\varphi_p(\theta) = \frac{\cos(p\theta) - \cos(p\alpha)}{\cos(\theta) - \cos(\alpha)} \text{ si } \theta \neq \alpha$$
$$\varphi_p(\alpha) = p \frac{\sin(p\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

a) Vérifier que φ_p est continue.

b) Montrer que :

$$\int_0^\pi \varphi_1(\theta) d\theta = \pi \varphi_1(\alpha) \text{ et } \int_0^\pi \varphi_2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \varphi_2(\alpha).$$

c) Établir la relation :

$$\varphi_p(\theta) = 2 \cos(\alpha) \varphi_{p-1}(\theta) - \varphi_{p-2}(\theta) + 2 \cos((p-1)\theta),$$

pour tout entier $p \geq 3$.

d) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, $\int_0^\pi \varphi_p(\theta) d\theta = \frac{\pi}{p} \varphi_p(\alpha)$.

On suppose n fixé et on pose, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$L_k(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

où $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est l'ensemble des zéros de T_{n+1} (classés, par exemple, par valeurs croissantes).

2⁰) Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n .

Soit $P \in E_n$: écrire P dans la base $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$. On exprimera les coefficients de cette décomposition à l'aide des nombres $P(x_k)$ et $L_k(x_k)$ où $0 \leq k \leq n$.

3⁰) a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in E_n$, on a :

$$\int_{-1}^1 w(x) P(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n P(x_k).$$

b) Montrer que l'égalité précédente reste vraie pour tout polynôme $P \in E_{2n+1}$.