❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

Toutes les réponses devront être justifiées.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

L'utilisation des calculatrices est autorisée.

L'objet de ce problème est l'étude des splines cubiques d'interpolation et de l'approximation des fonctions par ces splines. Il est composé d'un préliminaire et de trois parties. Le préliminaire et la première partie sont indépendants du reste du problème. Les parties II et III utilisent les mêmes notations. Il suffit toutefois d'admettre la question II5e pour pouvoir traiter la partie III.

Préliminaires

On note $\mathcal{F}([a,b])$ l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs réelles. On rappelle que cet ensemble, muni des opérations usuelles sur les fonctions, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $f_{|_I}$ la restriction de f à cet intervalle I.

1. Dans E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rappeler la définition d'une famille libre finie.

2. Parmi les trois familles de fonctions suivantes, lesquelles sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

$$\begin{cases} x \longmapsto 1 \\ x \longmapsto x \\ x \longmapsto x^2 \\ x \longmapsto x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \longmapsto 1 \\ x \longmapsto \cos x \\ x \longmapsto \cos 2x \\ x \longmapsto \cos^2 x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \longmapsto 1 \\ x \longmapsto x^3+1 \\ x \longmapsto |x^3| \end{cases}$$

3. Donner la dimension des sous-espaces vectoriels engendrés par ces trois familles.

Partie I

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[-1,1]$ telles que la restriction de f à $[-1,0[$ soit un polynôme de degré inférieur ou égal à trois, la restriction de f à $]0,1]$ soit un (autre) polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1,1]$ tout entier.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel.

2. Soit
$$f\ :\ x \longmapsto \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x + \delta_1 & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ et δ_2 pour que f appartienne à $\mathcal{G}$.

3. On pose
$$f_0\ :\ x \mapsto 1, \quad f_1\ :\ x \mapsto x, \quad f_2\ :\ x \mapsto x^2$$
$$f_3\ :\ x \mapsto x^3, \quad f_4\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$
Montrer que $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ forme une base de $\mathcal{G}$.
Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?

Partie II

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement croissante. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$. On considère S_{σ_n} l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0, x_n]$ telles que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, pour i variant de 0 à $n-1$, est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. On pourra noter que l'ensemble $\mathcal{G}$ de la partie I est du type S_{σ_2}.
Un élément de S_{σ_n} sera appelé *fonction spline*.
On note enfin $S^0_{\sigma_n}$ l'ensemble des fonctions splines $f \in S_{\sigma_n}$ telles que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $f(x_i) = 0$.

1. Montrer que S_{σ_n} est un espace vectoriel.

2. Quelle est la dimension de S_{σ_1} ?

3. On suppose que S_{σ_n} est de dimension d. Soit $(f_1, \dots, f_d)$ une base de S_{σ_n} et soit $f \in S_{\sigma_{n+1}}$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique d-uplet de réels $(a_1, \dots, a_d)$ tel que
   $$\forall x \in [x_0, x_n], \quad f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i(x).$$

   (b) Soit p_i le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $f_{i|]x_{n-1},x_n[} = p_i$.
   On définit alors
   $$\forall i \leq d, \quad \tilde{f}_i\ :\ x \mapsto \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in [x_0, x_n[\\ p_i(x) & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases},$$
   $$\tilde{f}_{d+1}\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_0, x_n[\\ (x - x_n)^3 & \text{si } x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases}.$$

On pose enfin $F = f - \sum_{i=1}^{d} a_i \tilde{f}_i$.
Montrer que sur $[x_n, x_{n+1}]$, F est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $F(x_n) = F'(x_n) = F''(x_n) = 0$.

(c) Montrer que $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d+1})$ forme une base de $S_{\sigma_{n+1}}$.

(d) En déduire que la dimension de S_{σ_n} est $n+3$.

4. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 sur $[a, b]$ (avec $a < b$) vérifiant

$$p(a) = \alpha, \quad p'(a) = \beta, \quad p''(a) = \gamma, \quad p(b) = \delta$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels fixés.

(b) Soit $(y_0, \dots, y_n, \alpha, \beta)$ $n+3$ réels fixés. Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe une unique fonction spline $f \in S_{\sigma_n}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad f(x_i) &= y_i, \\ f'(x_0) &= \alpha, \\ f''(x_0) &= \beta. \end{aligned}$$

(c) Montrer que $S^0_{\sigma_n}$ est un espace vectoriel.
Préciser sa dimension.

5. Soit $f \in S^0_{\sigma_n}$.

(a) Que vaut $f^{(4)}(x)$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$?

(b) Montrer que

$$\int_{x_0}^{x_n} \left(f''(x)\right)^2 dx = f'(x_n)f''(x_n) - f'(x_0)f''(x_0).$$

(On pourra dans un premier temps exprimer la dérivée de $f'f''$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ en fonction de f', f'' et f'''.)

(c) Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} S^0_{\sigma_n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \varphi & \longmapsto & \left(\varphi'(x_0), \varphi'(x_n)\right) \end{array}$.
Montrer que Φ est injective.
Φ est-elle bijective ?

(d) En déduire qu'il existe une unique fonction spline f de S_{σ_n} qui vérifie,

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad f(x_i) &= y_i, \\ f'(x_0) &= \alpha, \\ f'(x_n) &= \beta. \end{aligned}$$

Partie III

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f''(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0)=f(1)=0$.
Soit g la fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, 2-périodique et qui vérifie

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x)=f(x).$$

(a) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x).$$

(b) Quelle est la série de Fourier de g'' ?
g'' est-elle égale à sa série de Fourier ?

(c) En déduire que

$$\int_0^1 f''(x)^2 dx = \frac{\pi^4}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 n^4.$$

(d) Montrer que si les séries à termes réels $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, alors la série $\sum a_n b_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2}.$$

(e) En déduire que

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \|f\|.$$

On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2. Soit $\sigma=(0=x_0,\dots,x_n=1)$ une subdivision de $[0,1]$. On note $h_i=x_{i+1}-x_i$ et $h=\sup_{0\leq i\leq n-1} h_i$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ l'unique fonction spline de S_σ qui vérifie

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \varphi(x_i)=f(x_i), \quad \varphi'(0)=f'(0), \quad \varphi'(1)=f'(1).$$

(a) En considérant la fonction g_i définie pour tout $t\in[0,1]$ par

$$g_i(t)=(f-\varphi)(x_i+t\,h_i),$$

montrer que

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)-\varphi(x)| \leq \frac{\|f-\varphi\|}{3\sqrt{5}} h_i^{3/2}.$$

(b) Montrer que

$$\|f-\varphi\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2.$$

On pourra dans un premier temps obtenir une expression simple de

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f''(t)-\varphi''(t)\big)\varphi''(t)\,dt$$

en effectuant une intégration par parties.

(c) En déduire que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-\varphi(x)| \leq \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}} h^{3/2}.$$