

✱ Banque filière PT ✱

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Ce problème se compose de 7 parties. Les parties I et II sont totalement indépendantes des autres. Les parties III, IV, V sont liées entre-elles, mais il est possible d'admettre un résultat précédent pour poursuivre la résolution du problème. Enfin, les parties VI et VII utilisent le résultat obtenu dans la partie V.

Partie I

1. On considère un triangle ABC , rectangle en C et un point M sur le segment $[A, B]$. On note x la distance AC , a la distance de M à la droite (BC) et b la distance de M à la droite (AC) . Calculer en fonction de x , a et b la longueur de l'hypoténuse AB du triangle.
2. On considère dans un plan deux couloirs perpendiculaires de 2 mètres de largeur chacun. Une barre métallique rigide (que nous supposons sans épaisseur) glisse sur ce plan. On cherche à faire passer cette barre par les deux couloirs. Quelle est la longueur maximale de la barre qui peut passer d'un couloir à l'autre ?

Partie II

Un fabricant de boîtes de conserve a une commande : il doit produire des boîtes cylindriques de volume V donné. Quelles doivent être les caractéristiques de la boîte (diamètre et hauteur) pour que le fabricant utilise le moins de métal possible ?

Partie III

Dans toute cette partie, on considère un intervalle fermé I et une fonction f définie sur I à valeurs dans I et qui vérifie, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

où k est une constante strictement inférieure à 1.

On dit dans ce cas que la fonction f est contractante sur I .

1. Montrer que la fonction f est continue sur I .
2. Montrer que si x_1 et x_2 sont deux réels vérifiant

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = x_2,$$

alors $x_1 = x_2$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
 - (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à I .
4. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Partie IV

Dans toute cette partie, on considère un ouvert U de \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne, et f une application de classe \mathcal{C}^1 sur U , à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans \mathbb{R} par

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

1. Montrer que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur U et calculer $\frac{\partial g}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que

$$\forall (x, y) \in B, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,

$$|g(x, y') - g(x, y)| \leq \frac{1}{2} |y - y'|.$$

4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $I \times [b - r, b + r] \subset U$ et tel que

$$\forall x \in I, \quad |g(x, b) - g(a, b)| \leq \frac{r}{2}.$$

5. Dédurre des deux dernières inégalités que

$$\forall(x, y) \in I \times [b - r, b + r], \quad g(x, y) \in [b - r, b + r].$$

6. Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \mapsto g(x, y)$ est une application contractante sur $[b - r, b + r]$.
7. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b - r, b + r]$ tel que $f(x, y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$ et on admet que l'application φ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
8. Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ sur I . En déduire l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f .

Partie V

Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et de classe \mathcal{C}^1 sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x, y) \in U, f(x, y) = 0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x, y) = 0$.

1. Soit (a, b) un point de U tel que $f(a, b) = 0$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe un ouvert V de \mathbb{R}^2 contenant (a, b) et contenu dans U , un intervalle I de \mathbb{R} contenant a et une application φ de classe \mathcal{C}^1 sur I tels que

$$((x, y) \in V, f(x, y) = 0) \iff (x \in I, y = \varphi(x)).$$

- (b) Montrer que si (a, b) est un extremum de F lié par la relation $f(x, y) = 0$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0.$$

- (c) La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose maintenant que le point (a, b) vérifie $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$. Montrer que l'implication de la question V1b est encore vraie.

Partie VI

Trouver le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé (On pourra utiliser les résultats de la partie V).

Partie VII

On considère les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$$
$$\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y < 1\}$$

On remarquera que D est un ensemble fermé et que \tilde{D} est un ensemble ouvert.

1. Dessiner sommairement l'ensemble D .
2. Montrer que l'ensemble D est borné.
3. On considère la fonction F définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^2 e^y.$$

Montrer que F admet un maximum global et un minimum global sur D .

4. Chercher les extrema locaux de F sur \tilde{D} .
5. Déterminer les extrema globaux de F sur D .