BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Mercredi 6 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLEME 1

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I : Préliminaires

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. On notera α et β les deux racines de cette équation.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit M une matrice carrée d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Soit λ une valeur propre de M. Montrer que s'il existe trois éléments a, b, c de $\mathbb{K}$ tels que

$$aM^2 + bM + cI_p = 0$$

où I_p désigne la matrice de l'identité de $\mathbb{K}^p$,
alors λ vérifie $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Partie II

On note E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{2n}$ où n est un entier naturel non nul.
On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n, e'_1, ..., e'_n)$ la base canonique de E.
Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \begin{cases} \varphi(e_k) = e_k - e'_k \\ \varphi(e'_k) = e_k + e'_k \end{cases}$$

On appelle A_{2n} la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
A_{2n} est donc une matrice carrée d'ordre $2n$.

1. *Dans cette question et cette question seulement, on suppose* $n = 1$.
Ecrire A_2. A_2 est-elle diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

2. Calculer A_{2n}^2 et montrer que $A_{2n}^2 = 2A_{2n} - 2I_{2n}$ où I_{2n} est la matrice de l'application identique Id_E de E.

3. Que peut-on dire des valeurs propres de A_{2n} ?
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A_{2n} est-elle diagonalisable ?

Dorénavant, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Justifier que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi - 2Id_E$.
Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \alpha Id_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(\varphi - \beta Id_E)$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
En déduire que A_{2n} est diagonalisable.

5. Déterminer une base de vecteurs propres de A_{2n}.

(On pourra noter $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$)

PROBLEME 2

Notations :

Pour k et n entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera indifféremment $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$ le coefficient binomial : $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Dans ce problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées sont définies sur cet espace probabilisé.

Résultats admis :

(1) Formule de Stirling : $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$

(2) Equivalent des sommes partielles pour des séries divergentes :
Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites positives. Si $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$ et si la série de terme général b_n diverge, alors la série de terme général a_n diverge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$

Partie I : Préliminaires

Dans tout le problème, on note pour tout entier naturel n,

$$u_n = \mathrm{C}_{2n}^n = \binom{2n}{n}$$

1. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un réel C strictement positif tel que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} C \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant 2^{2n}$$

Partie II : Déplacement aléatoire d'une puce

Une puce se déplace sur un axe gradué. Elle part de la position 0 et à chaque instant i entier naturel non nul, elle se déplace d'un pas de longueur 1 au hasard vers la droite ou vers la gauche.
On définit la variable aléatoire X_i pour tout i entier naturel non nul, par

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si elle se déplace vers la droite} \\ X_i = -1 & \text{si elle se déplace vers la gauche} \end{cases}$$

Ainsi $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de même loi donnée pour tout entier naturel i non nul par

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Dans cette partie, on suppose que les X_i sont indépendantes.
Pour tout entier naturel n, on note S_n la variable aléatoire représentant la position de la puce au bout de n déplacements. On aura alors $S_0 = 0$ et pour tout entier naturel n strictement positif

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. Donner la loi de S_1 et son espérance $\mathrm{E}(S_1)$.
Donner la loi de S_2 et son espérance $\mathrm{E}(S_2)$.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{S_{2n} + 2n}{2} = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{X_i + 1}{2} \right)$$

et donner la loi de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{X_i + 1}{2} \right)$.

3. En déduire que pour tout entier n strictement positif,

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} u_n$$

Dorénavant, pour tout entier naturel i non nul, on considère la variable aléatoire Z_i définie par

$$\begin{cases} Z_i = 1 & \text{si} \quad S_{2i} = 0 \\ Z_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on souhaite étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'espérance $E(Y_n)$ de la variable aléatoire

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

4. Que représente pour la puce la valeur de la variable aléatoire Y_n ?

5. En utilisant le résultat admis (2), montrer que

$$\mathrm{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

En utilisant une méthode de comparaison entre série et intégrale, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

En déduire un équivalent de $\mathrm{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III : Autre méthode de déplacement d'une puce

$\boxed{\text{A}}$ Résultats d'analyse

1. Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $[0,\ 1[$ et tout entier naturel n ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{4^k} x^k + (n+1) \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{3/2}}$$

On pourra raisonner par récurrence sur n.

2. Montrer que, si t et x sont des réels $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, alors

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$$

3. En utilisant les préliminaires, montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $[0,\ 1[$,

$$0 \leqslant (n+1) \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{3/2}} \leqslant (n+1)x^n \int_0^x (1-t)^{-3/2}\, \mathrm{d}t$$

En déduire que, pour tout x élément de l'intervalle $[0,\ 1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1) \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{3/2}} = 0$$

4. Déduire de ce qui précède que, pour tout x élément de l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{4}\right[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \qquad (R_1)$$

On pose, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

5. Pour tout entier naturel n, on définit les sous-ensembles K_n et L_n de $\mathbb{N}^2$ par

$$K_n = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leqslant j \leqslant n \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant n\} \quad \text{et} \quad L_n = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 / j+k \leqslant n\}$$

Montrer que

$$L_n \subset K_n \subset L_{2n}$$

6. Soit x élément de l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{4}\right[$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{i=0}^{n} v_i x^i \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n} u_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x^k\right) \leqslant \sum_{i=0}^{2n} v_i x^i$$

7. Déduire de ce qui précède que, pour tout x élément de l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{4}\right[$, la série de terme général $v_n x^n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \frac{1}{1-4x} \qquad (R2)$$

$\boxed{\text{B}}$ Application au déplacement aléatoire de la puce

Soit N un entier naturel fixé non nul. On extrait au hasard une partie A de cardinal N de l'ensemble $\{1, 2, ..., 2N\}$. Pour tout i élément de $\{1, 2, ..., 2N\}$, on considère la variable aléatoire X_i' définie par

$$\begin{cases} X_i' = 1 & \text{si} \quad i \in A \\ X_i' = -1 & \text{si} \quad i \notin A \end{cases}$$

On note $S_0' = 0$ et pour tout i élément de $\{1, 2, ..., 2N\}$,

$$S_n' = \sum_{i=1}^{n} X_i'$$

On peut considérer à nouveau pour tout entier naturel n, S_n' comme la position d'une puce au bout de n déplacements dictés par la partie A tirée au sort.

1. On considère, *dans cette question seulement*, que $N = 3$. On suppose que l'on a tiré au sort la partie $A = \{1, 2, 5\}$.
Donner, pour tout i élément de $\{1, ..., 6\}$, les valeurs de X_i' et de S_i' .
2. Que vaut S_{2N}' ?
3. Montrer que, pour tout i élément de $\{1, 2, ..., 2N\}$,

$$\mathbf{P}(X_i' = 1) = \mathbf{P}(X_i' = -1) = \frac{1}{2}$$

4. On suppose que les variables $(X_i')_{i \in \{1,2,...,2N\}}$ sont mutuellement indépendantes.
Calculer la variance $\mathrm{V}(S_{2N}')$ de S_{2N}'.
Trouver une contradiction et conclure.

Dorénavant, pour tout i élément de $\{1, 2, ..., N\}$, on considère la variable aléatoire Z'_i définie par

$$\begin{cases} Z'_i = 1 & \text{si} \quad S'_{2i} = 0 \\ Z'_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on souhaite étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'espérance $E(Y'_n)$ de la variable aléatoire

$$Y'_n = \sum_{i=1}^{n} Z'_i$$

5. Montrer que

$$\mathrm{E}(Y'_N) = \frac{v_N}{u_N}$$

où v_N est défini au III.A.

6. A l'aide du cours sur les séries, écrire $\dfrac{1}{1-4x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k x^k$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right[$.

7. On admettra que $(R2)$ implique $v_N = \varepsilon_N$.
En déduire un équivalent de $\mathrm{E}(Y'_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.