BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Mardi 11 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Notations :

Si p et q sont des entiers, on note $\binom{p}{q} = \begin{cases} \dfrac{p!}{q!(p-q)!} & \text{si } q \text{ est dans } \{0,1,\ldots,p\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour n entier naturel non nul, on note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.
On note, pour k dans $\{0,1,\ldots,n\}$, P_k la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_k(x) = x^k$$

On rappelle que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de E_n.

Les parties III et IV de ce problème sont indépendantes. Les résultats de la partie I sont utilisés en fin de partie III.

Partie I - Un résultat préliminaire

I.1) Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur une partie X de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On explicitera $f^{-1}(x)$ pour $x \in X$.

Partie II - Définition d'un endomorphisme

Si P appartient à E_n, on pose, pour x réel non nul, $u(P)(x) = x^n P(1 + \dfrac{1}{x})$.
II.2) *Exemple :* dans cette question seulement, on prend $n = 2$.
a) Pour P dans E_2 défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, exprimer, pour x réel non nul, $u(P)(x)$ sous la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec α, β et γ réels que l'on exprimera en fonction de a, b et c.
b) Quelle valeur faut-il donner à $u(P)(0)$ pour que $u(P)$ soit dans E_2 ?

On revient au cas général : n est de nouveau un entier naturel non nul quelconque.

II.3) Soit P dans E_n ; on pose $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k$.

Ainsi : pour tout x réel, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ (où $a_0, \ldots, a_n$ sont les coefficients réels de P).

Déterminer la limite, notée ℓ, de $u(P)(x)$ lorsque x tend vers 0. Dans la suite de ce problème, on posera $u(P)(0) = \ell$ et on admettra qu'alors $u(P)$ est dans E_n.
II.4) Montrer que u est un endomorphisme de E_n.

Partie III - Étude de la bijectivité de l'endomorphisme u

On notera M_n la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

III.5) *Exemple :* montrer que $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et justifier que M_3 est inversible en cherchant à déterminer son inverse M_3^{-1} que l'on explicitera.

On revient au cas général (n entier naturel non nul quelconque).
III.6) Déterminer le noyau de u et en déduire que u est bijectif.
III.7) On pose pour x réel et k entier dans $\{0, \ldots, n\}$,

$$Q_k(x) = (x+1)^k x^{n-k}$$

En utilisant la question précédente, justifier que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de E_n.
III.8) Exprimer, pour j dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, $u(P_{j-1})$ à l'aide de $P_{n-j+1}, P_{n-j+2}, \ldots, P_n$.
III.9) En déduire, pour i et j dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n.
III.10) Déterminer, pour x réel différent de 1 et P dans E_n, $u(P)\left(f^{-1}(x)\right)$.

III.11) En déduire u^{-1}.
III.12) Déterminer, M_n^{-1} (on donnera, pour i et j dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n^{-1}).

Partie IV - Étude du spectre de u

IV.13) Déterminer les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Dans la suite, on notera ω_1 (resp. ω_2) la racine positive (resp. négative) de cette équation.
IV.14) Montrer que si x est réel, $1 + x - \omega_2 x = -\omega_1\omega_2 + \omega_1 x$.
Calculer de même $1 + x - \omega_1 x$.
IV.15) En déduire que le polynôme V_k défini, pour k dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ et x réel, par :

$$V_k(x) = (x - \omega_1)^k (x - \omega_2)^{n-k}$$

est vecteur propre de u associé à une valeur propre que l'on exprimera à l'aide de n, k et ω_1 seulement.
IV.16) Exprimer V_k à l'aide de Q_k (voir question 7)) et en déduire que $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base de E_n.
IV.17) Que peut-on en déduire ?
IV.18) Montrer que les valeurs propres de u trouvées question 15) sont distinctes deux à deux. En déduire une nouvelle preuve du fait que $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base de E_n.
IV.19) *Exemples :* diagonaliser M_1 et M_2. On s'attachera, pour chaque valeur propre, à donner un vecteur propre de dernière composante 1.

PROBLÈME 2

Notations :

Pour n entier naturel non nul, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On rappelle qu'une permutation de $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même et qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$.
Une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ sera identifiée au n-uplet $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$.
Par exemple, le triplet $(1, 3, 2)$ désigne la permutation σ de $\{1, 2, 3\}$ définie par :

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(2) = 3 \quad \text{et} \quad \sigma(3) = 2.$$

On notera Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et l'espace probabilisé utilisé dans ce problème sera $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où P est la probabilité uniforme sur Ω. Les variables aléatoires étudiées seront définies sur cet espace probabilisé.

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes, si on admet les résultats qui y sont montrés.

Partie I - Un équivalent de H_n

I.20) Montrer que, pour tout réel positif x,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

I.21) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

I.22) Montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie II - Maximums et minimums provisoires

Soit n un entier naturel non nul.
Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ représentée par le n-uplet $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ d'entiers distincts de $[\![1,n]\!]$ et soit i entier avec $1 \leq i \leq n$. On dit que $\sigma(i)$ est un maximum (resp. minimum) provisoire de σ si :

$$\sigma(i) = \max(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)) \quad \Big(\text{resp. } \sigma(i) = \min(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i))\Big)$$

Exemple : si $n = 6$, la permutation $\sigma = (2,5,4,1,6,3)$ présente des maximums provisoires en $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 5$ et $\sigma(5) = 6$ et des minimums provisoires en $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(4) = 1$.
II.23) Dans cette question, $n = 3$. Donner les $3! = 6$ permutations de $\{1,2,3\}$ sous forme de triplets et pour chacune d'elles, les maximums et minimums provisoires. On donnera le résultat sous forme d'un tableau.

Dans la suite de cette partie, on revient au cas général : n entier naturel non nul quelconque.
II.24) Quelles sont les permutations pour lesquelles le nombre de maximums provisoires est 1, (resp. n) ?
II.25) Soit k un entier de $[\![1,n]\!]$. Justifier qu'il existe autant de permutations présentant k maximums provisoires que de permutations présentant k minimums provisoires.

Si $k \in [\![1,n]\!]$, on note $M_{n,k}$ le nombre de permutations ayant k maximums provisoires.
II.26) Déterminer $M_{n,1}$ et $M_{n,n}$.
II.27) On suppose ici $n \geq 3$. Montrer que pour tout k de $[\![2,n-1]\!]$,

$$M_{n,k} = (n-1)M_{n-1,k} + M_{n-1,k-1}$$

On pourra, pour une permutation σ, discuter suivant que $\sigma(n) = n$ ou non.

Dans la fin de ce problème, on désigne par X_n (resp. Y_n) les variables aléatoires représentant le nombre de maximums (resp. minimums) provisoires des permutations de $[\![1,n]\!]$.

Partie III - Lois de X_3 et Y_3

III.28) Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.
III.29) Montrer que Y_3 a même loi que X_3.
III.30) Déterminer la loi de (X_3, Y_3) et sa covariance. Les variables X_3 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

Partie IV - Espérance et variance de X_n

Jusqu'à la fin de ce problème n désigne un entier naturel non nul.
IV.31) Justifier que $X_n(\Omega) = Y_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et que X_n et Y_n ont même loi.

Afin de caractériser la loi de X_n, on introduit sa fonction génératrice g_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k)x^k$$

où $P(X_n = k)$ désigne la probabilité que X_n soit égale à k.
IV.32) Que vaut $g_n(1)$?
IV.33) Exprimer l'espérance de X_n notée $E(X_n)$ à l'aide de $g_n'(1)$.
IV.34) Donner une expression de la variance de X_n notée $V(X_n)$ à l'aide de g_n et de ses dérivées.

On se propose maintenant de déterminer g_n.
IV.35) Exprimer $P(X_n = k)$ à l'aide de $M_{n,k}$.
IV.36) En utilisant la question 27), montrer que pour x réel et $n \geq 2$,

$$g_n(x) = \left(\frac{x + n - 1}{n}\right) g_{n-1}(x)$$

IV.37) En déduire que pour x réel et n entier naturel non nul,

$$g_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x + k)$$

IV.38) Retrouver la loi de X_3 et déterminer la loi de X_4.
IV.39) Montrer que $E(X_n) = H_n$ et en déduire un équivalent de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
IV.40) Déterminer $V(X_n)$ à l'aide de sommes et donner un équivalent de $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque : le calcul de l'espérance de X_n permet de montrer que la recherche du plus grand élément d'une liste de n éléments distincts a une complexité moyenne équivalente à $\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.