



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : ESSEC

CODE ÉPREUVE :

281

ESSECM1\_S

CONCOURS D'ADMISSION DE 2006

**Option scientifique**

**MATHEMATIQUES I**

*Lundi 15 mai 2006 de 8h à 12h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout ce problème, la lettre  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note  $\llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

On rappelle qu'une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur lui-même.

Par ailleurs, on note :

- $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ;
- $M_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels ;
- $M_{p,q}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à  $p$  lignes,  $q$  colonnes à coefficients réels ;
- $m_{i,j}$  l'élément générique d'une matrice  $M$ , c'est-à-dire le réel situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $M$  ;
- ${}^t M$  la transposée d'une matrice  $M$ .

Lorsque  $\sigma$  appartient à  $\mathfrak{S}_n$ , on appelle matrice de la permutation  $\sigma$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  notée  $P_\sigma$

dont le terme générique  $p_{i,j}$  vérifie :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$   $p_{i,j} = 1$  si  $\sigma(i) = j$  et  $p_{i,j} = 0$  sinon.

Par exemple, pour  $n = 3$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$  définie par  $\sigma(1) = 2$ ,  $\sigma(2) = 3$ ,  $\sigma(3) = 1$ ,  $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble  $E_n$  des matrices  $M$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\text{la propriété suivante : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{k=1}^n m_{i,k} = \sum_{k=1}^n m_{k,j} .$$

Dans ce cas, leur valeur commune sera notée  $\omega(M)$ .

## PARTIE I : Etude de l'ensemble $E_n$

On note  $J$  la matrice d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 c'est-à-dire égale à  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

et  $U$  la matrice colonne à  $n$  lignes égale à  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1) Généralités.

a) Montrer que  $E_n$  est un sous espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  et que l'application

$$\omega : E_n \rightarrow \mathbb{R} \quad M \mapsto \omega(M) \quad \text{en est une forme linéaire.}$$

b) Lorsque  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , établir que :  $M \in E_n$  si et seulement si  $U$  est vecteur propre commun à  $M$  et  ${}^t M$  associé à une même valeur propre.

c) Vérifier que  $E_n$  est stable pour le produit matriciel et préciser  $\omega(MN)$  en fonction de  $\omega(M)$  et  $\omega(N)$  lorsque  $M$  et  $N$  appartiennent à  $E_n$ .

2) Dimension de  $E_n$ .

a) Montrer que le noyau de  $\omega$  et la droite vectorielle engendrée par  $J$  sont supplémentaires dans  $E_n$ .

b) Pour  $(r, s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$ , on note  $A_{r,s}$  la matrice de  $E_n$  dont tous les éléments sont nuls sauf les quatre éléments :  $a_{1,1}, a_{r,s}, a_{1,s}, a_{r,1}$  qui sont tels que :  $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$  et  $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$ .

Montrer que la famille  $(A_{r,s})_{(r,s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2}$  est libre puis qu'elle est génératrice du noyau de  $\omega$ .

En déduire la dimension de  $E_n$ .

3) Une famille génératrice de  $E_n$ .

a) Établir que pour toute permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la matrice  $P_\sigma$  appartient à  $E_n$  et que les matrices  $P_\sigma$  sont les seules matrices  $M$  de  $E_n$  telles que  $\omega(M) = 1$  n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne.

b) Écrire la matrice  $P_\sigma$  correspondant à la permutation  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$  définie par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \sigma(k) = k+1 \quad \text{et} \quad \sigma(n) = 1.$$

Préciser les matrices :  $(P_\sigma)^2, (P_\sigma)^3, \dots, (P_\sigma)^n$ .

c) Exprimer  $J$  comme combinaison linéaire de matrices de permutations. Faire de même avec chaque matrice du type  $A_{r,s}$  quand  $(r, s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$  : on pourra se limiter aux matrices  $A_{2,2}$  et  $A_{3,2}$  (si  $n \geq 3$ ) et donner une décomposition explicite de ces deux matrices en combinaison linéaire de matrices de permutations.

d) Prouver qu'il existe  $(n-1)^2 + 1$  permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(n-1)^2+1}$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telles que

$(P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \dots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$  soit une base de  $E_n$ .

Que représente la somme des composantes d'une matrice  $M$  de  $E_n$  relativement à cette base ?

**Les deux parties suivantes du problème sont indépendantes de la partie I**

On s'intéresse dans toute la suite du problème à l'ensemble des matrices  $M$  de  $E_n$  dont tous les éléments  $m_{i,j}$  sont positifs ou nuls. On note  $E_n^+$  cet ensemble.

**PARTIE II : Etude de l'ensemble  $E_n^+$**

- 1) Montrer que  $E_n^+$  est stable pour le produit matriciel et que pour toute famille  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$  de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et toute famille  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  de réels positifs ou nuls  $\sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+$ .

**Dans cette partie, on admettra que:**

$$\forall M \in E_n \setminus \{0\} \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{telle que} \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)} > 0.$$

- 2) a) On suppose que  $\sigma$  est une telle permutation associée à  $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$  et on désigne par  $c = \min\{m_{1,\sigma(1)}, m_{2,\sigma(2)}, \dots, m_{n,\sigma(n)}\}$ . Montrer que :  $M - cP_\sigma \in E_n^+$ .
- b) En déduire que pour toute matrice  $M$  de  $E_n^+ \setminus \{0\}$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $p$  réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  strictement positifs tels que :  $M = \sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k}$ .
- c) Montrer qu'une matrice de  $E_n^+$  possédant au moins  $n^2 - n + 1$  termes nuls est nulle ; en déduire que :  $1 \leq p \leq n^2 - n + 1$ .

d) Exemple : lorsque  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ , exprimer  $M$  comme combinaison linéaire à scalaires

strictement positifs de matrices de permutations de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

- 3) Une application : L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique et on note  $\langle x|y \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ .

On désigne par  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  deux bases orthonormales de  $\mathbb{R}^n$ .

- a) Vérifier que la matrice  $M_{u,v} = \left( \langle v_i | u_j \rangle \right)^2$  appartient à  $E_n^+$  et donner la valeur de  $\omega(M_{u,v})$ .

Lorsque  $\sigma$  est une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , préciser  $M_{u,v}$  dans le cas où

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}).$$

- b) On introduit l'endomorphisme symétrique  $s$  de  $\mathbb{R}^n$  dont  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base orthonormale de diagonalisation et de valeurs propres respectivement associées  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

On note  $\Lambda$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ .

Montrer l'égalité matricielle : 
$$\begin{pmatrix} \langle s(v_1) | v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s(v_n) | v_n \rangle \end{pmatrix} = M_{u,v} \Lambda .$$

c) En utilisant la question II 2) b) , établir que pour toute forme linéaire  $f$  de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  , il existe deux permutations  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vérifiant :  $f(P_\sigma \Lambda) \leq f(M_{u,v} \Lambda) \leq f(P_{\sigma'} \Lambda)$ .

d) On suppose que :  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  et  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Trouver une forme linéaire  $f$  permettant d'en déduire les inégalités :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \leq \sum_{k=1}^r \langle s(v_k) | v_k \rangle \leq \sum_{k=1}^r \lambda_{n-r+k} .$$

Que représente le terme  $\langle s(v_k) | v_k \rangle$  dans la matrice de  $s$  relativement à la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  et pouvez- vous donner une interprétation matricielle des inégalités obtenues ci- dessus ?

### PARTIE III

L'objet de cette dernière partie est la justification du résultat admis dans la partie II 1).

Lorsque  $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  , on appelle sous-matrice de type  $(p, q)$  de la matrice  $M$  appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  toute matrice extraite de  $M$  en supprimant de  $M$   $n-p$  lignes et  $n-q$  colonnes.

1) Lorsque  $\sigma$  est une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $M$  un élément de  $M_n(\mathbb{R})$  , expliciter le terme générique des matrices  $P_\sigma M$  et  $M P_{\sigma^{-1}}$ . Comment obtient-on ces deux matrices à partir de  $M$  ?

2) On suppose que  $M$  appartient à  $M_n(\mathbb{R})$  et qu'elle contient une sous-matrice nulle de type  $(p, q)$ .

a) Montrer que :  $\exists \sigma, \sigma'$  deux permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telles que  $P_\sigma M P_{\sigma'} = \begin{pmatrix} X & | & 0 \\ \hline Z & & Y \end{pmatrix}$  avec

$$X \in M_{p, n-q}(\mathbb{R}) , Z \in M_{n-p, n-q}(\mathbb{R}) \text{ et } Y \in M_{n-p, q}(\mathbb{R}) .$$

b) En déduire que si  $M$  appartient à  $E_n^+ \setminus \{0\}$  , on a  $p+q \leq n$ .

3) On désire établir la propriété  $(\mathcal{P}_n)$  suivante : si  $M$  appartient à  $M_n(\mathbb{R})$  et vérifie l'hypothèse  $(\mathcal{H}_n) : \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad m_{1, \sigma(1)} m_{2, \sigma(2)} \dots m_{n, \sigma(n)} = 0$  , alors  $M$  contient au moins une sous- matrice nulle de type  $(p, q)$  avec  $p+q = n+1$ .

a) Le vérifier pour  $n = 2$ .

b)  $n$  étant supérieur ou égal à 3, on suppose que la propriété  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée pour tout  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ .

On désigne par  $M$  une matrice appartenant à  $M_n(\mathbb{R})$  et vérifiant  $(\mathcal{H}_n)$ .

▪ Établir que  $M$  contient une sous-matrice de type  $(n-1, n-1)$  vérifiant  $(\mathcal{H}_{n-1})$ .

▪ En déduire que :  $\exists \tau, \tau' \in \mathfrak{S}_n , \exists p, q / p+q = n$  tels que  $P_\tau M P_{\tau'} = \begin{pmatrix} X & | & 0 \\ \hline Z & & Y \end{pmatrix}$  avec

$$X \in M_p(\mathbb{R}) , Z \in M_{q, p}(\mathbb{R}) \text{ et } Y \in M_q(\mathbb{R}) .$$

▪ Montrer que  $X$  vérifie  $(\mathcal{H}_p)$  ou  $Y$  vérifie  $(\mathcal{H}_q)$ .

▪ En déduire alors que  $M$  contient une sous-matrice nulle de type  $(p', q')$  telle que  $p'+q' = n+1$  et conclure.

4) Montrer alors, à l'aide de 2) b) que :  $\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\} \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $m_{1, \sigma(1)} m_{2, \sigma(2)} \dots m_{n, \sigma(n)} > 0$ .

\*\*\*