❋ BANQUE FILIERE PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-B

durée 4h

Le problème étudie certaines notions mathématiques qui interviennent en mécanique des milieux continus.
La partie I s'intéresse aux surfaces de niveau de deux fonctions rattachées à des critères de résistance des matériaux. La partie II est consacrée à l'étude d'une représentation plane des contraintes autour d'un point d'un milieu continu. La partie III comporte deux exemples simples d'utilisation de ces notions.
R^2 et R^3 sont munis de leur structure euclidienne canonique. On note $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire de 2 éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de R^n ($n = 2$ ou 3) et $||\vec{u}||$ la norme euclidienne de $\vec{u}$. Les éléments de R^n sont appelés indifféremment vecteurs ou points.

Partie 1

R^3 est rapporté à la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit p, la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

2. On définit une nouvelle base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par les conditions suivantes :

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = \frac{p(\vec{k})}{||p(\vec{k})||}$$

   Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Peut on obtenir son inverse sans calcul ?
   On définit les applications de R^3 dans R par :

$$f(M) = f(x, y, z) = \sqrt{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}$$

$$g(M) = g(x, y, z) = Max[|x-y|, |y-z|, |z-x|]$$

   et on désigne pour tout α réel par S_α et Σ_α les surfaces d'équations respectives $f(x, y, z) = \alpha$ et $g(x, y, z) = \alpha$.

3. Que peut on dire de S_α et Σ_α si $\alpha < 0$ et lorsque $\alpha = 0$?
   On suppose désormais que $\alpha > 0$.

4. Soit M un élément de R^3 et $M' = p(M)$, comparer $f(M)$ et $f(M')$, $g(M)$ et $g(M')$. Que peut on en conclure sur la nature géometrique de S_α et Σ_α ?

5. Montrer que S_α est une surface de révolution dont on précisera l'axe.

6. Montrer que Σ_α est invariante par la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - y = 0$. Trouver deux autres plans de symétrie analogues de Σ_α.

7. Soit r, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe orienté par le vecteur $\overrightarrow{K}$. Montrer que Σ_α est invariante par cette rotation.

8. Déterminer l'intersection de Σ_α et P. Représenter sur une même figure l'intersection de Σ_α et P et celle de S_α et P pour $\alpha = \sqrt{2}$.

Partie II

Soit s un endomorphisme symétrique de R^3, de valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3. On désigne par $\mathcal{B}_s$ une base orthonormée de vecteurs propres de s. Pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de R^3, on décompose le vecteur $s(\overrightarrow{u})$ en un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$, sous la forme :

$s(\overrightarrow{u}) = \alpha(\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + t(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}.t(\overrightarrow{u}) = 0$ et $\alpha(\overrightarrow{u})$ est réel et $t(\overrightarrow{u})$ est un élément de R^3

On pose alors $\beta(\overrightarrow{u}) = ||t(\overrightarrow{u})||$. On associe à $\overrightarrow{u}$ le point $m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}), \beta(\overrightarrow{u}))$ de R^2 lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3.

1. Soit (u_1, u_2, u_3), les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}_s$. Expliciter $s(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathcal{B}_s$. Calculer alors $\alpha(\overrightarrow{u})$ et $||s(\overrightarrow{u})||$. En déduire $(\beta(\overrightarrow{u}))^2$.

2. Soit $(x, y) \in R \times R_+$. Montrer que si il existe un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ tel que $m(\overrightarrow{u}) = (x, y)$, le triplet (u_1^2, u_2^2, u_3^2) est solution du système :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$\sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \sigma_3 X_3 = x$$

$$\sigma_1^2 X_1 + +\sigma_2^2 X_2 + \sigma_3^2 X_3 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

3. On suppose jusqu'à la fin de la question que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

   (a) Résoudre le système (1) et expliciter X_1, X_2, X_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x$ et y.

   (b) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ tel que $m(\overrightarrow{u}) = (x, y)$ si et seulement si :

   $$y^2 + (x - \sigma_2)(x - \sigma_3) \geq 0$$

   $$y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_3) \leq 0$$

   $$y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_2) \geq 0$$

   (c) Représenter pour $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-1, 1, 4)$, l'ensemble de R^2 décrit par le point $m(\overrightarrow{u})$ lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3.

4. On suppose jusqu'à la fin de la question que $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$.

   (a) Calculer X_1 et $X_2 + X_3$ solutions du système formé des deux premières lignes de (1). Quelles relations x et y doivent ils vérifier pour que le système (1) ait des solutions ?

(b) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ tel que $m(\overrightarrow{u}) = (x, y)$ si et seulement si :

$$y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_2) = 0$$

(c) Représenter pour $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-1, 4, 4)$, l'ensemble de R^2 décrit par le point $m(\overrightarrow{u})$ lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3.

5. On suppose maintenant que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Quel est dans ce cas l'ensemble de R^2 décrit par le point $m(\overrightarrow{u})$ lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3.

6. s étant un endomorphisme symétrique quelconque de R^3, de valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3, on désigne par $T(s)$, la valeur maximale de $\beta(\overrightarrow{u})$ lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3. Montrer que $T(s)$ s'exprime facilement en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3 et de la fonction g définie dans la partie I.

Partie III

La modélisation des contraintes développées dans un matériau soumis à des sollicitations extérieures et occupant un domaine géométrique Ω de R^3 conduit à attacher à tout point M de Ω un endomorphisme symétrique s_M qui décrit l'état de contrainte autour de M. Un critère de résistance du matériau est alors que pour tout point M de Ω on ait $T(s_M) \leq R$ où T a été défini dans la partie précédente et où R est une constante positive dépendant du matériau. On étudie dans cette partie deux exemples simples d'application de ce critère.

1. Si un tube est soumis à un chargement combiné de traction torsion, l'endomorphisme s_M est défini, en chaque point M, dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associée aux coordonnées cylindriques par la matrice :

$$A_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des constantes indépendantes de M.

(a) Calculer $T(s_M)$.

(b) Dans le cas de la traction simple ($b = 0$), déterminer les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ du plan de base $(\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ tels que $\beta(\overrightarrow{u}) = T(s_M)$.

(c) La constante a de la matrice précédente est le quotient de l'effort de traction par l'aire de la section du tube. Montrer que l'effort de traction supportable sans dommage pour le matériau (c'est à dire vérifiant le critère de résistance) est maximal en traction simple.

2. Une épave est soumise au fond de la mer à des contraintes caractérisées en tout point M par $s_M = -p\underline{\underline{I}}$ où p est la pression à la profondeur où se trouve l'épave et $\underline{\underline{I}}$ l'identité de R^3. Montrer que, quelle que soit la profondeur où se trouve l'épave et selon la modélisation définie dans ce problème, l'épave n'est pas endommagée par la pression.