BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :

292

ESC_MATS

Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

mardi 15 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^5$ où $\mathbb{K}$ peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant les cas , muni de sa base canonique $\mathscr{BC} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ ainsi que du produit scalaire canonique et de la norme associés .
On note f l'endomorphisme de E défini par les relations suivantes :

$f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = e_4, f(e_4) = e_5, f(e_5) = e_1 + w$, où $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$.

On note id l'endomorphisme identité de E défini par $id(u) = u$ pour tout vecteur u de E.
On note également 0_E le vecteur nul de E.

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 2 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z^5$.
   (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 - z)P(z) = (2 - z)(1 - z^5)$.
   (b) le réel 1 est-il racine de P ? En déduire les 5 racines de P dans $\mathbb{C}$.
   (c) Donner la matrice A de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathscr{BC}$.
   (d) Montrer alors l'équivalence : (λ est valeur propre de A) $\Leftrightarrow$ ($P(\lambda) = 0$).
   En déduire les valeurs propres de f lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (e) On suppose dans cette question uniquement que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. f est-il diagonalisable ?
   (f) On suppose dans cette question uniquement que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. f est-il diagonalisable ?

2. On étudie dans cette question le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 , noté $\mathcal{E}_2 = \mathrm{Ker}(f - 2id)$.
   (a) Calculer $f(w)$ et en déduire que $w \in \mathcal{E}_2$.
   (b) Soit $H = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Justifier que H est de dimension 4 .
   (c) Soit u un vecteur de H. Montrer que $\|f(u)\| = \|u\|$.
   (d) Soit v un vecteur de $\mathcal{E}_2$. Montrer que $\|f(v)\| = 2\|v\|$.
   (e) En déduire que $H \cap \mathcal{E}_2 = \{0_E\}$ puis donner une base de $\mathcal{E}_2$.

3. Etude de f^5:
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k , $f^k(w) = 2^k w$.
   (b) Montrer que $f^5(e_1) = e_1 + w$, puis , que pour $k = 2, 3, 4$ on a $f^5(e_k) = e_k + 2^{k-1}w$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4, w)$ est une base de E.
   (d) Former la matrice de f^5 relativement à la base $\mathscr{B}'$ et donner les valeurs propres de f^5 .

4. Questions générales :
   (a) Soit λ un élément de $\mathbb{R}$ et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$.
   Montrer que si λ est valeur propre de g alors λ^5 est valeur propre de l'endomorphisme g^5.
   (b) En examinant l'endomorphisme f, que peut-on conclure sur une réciproque à cette propriété ?

EXERCICE 2

On pose pour tout entier naturel n non nul , $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée I_n.
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante , et convergente vers une limite notée ℓ .

3. On pose pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel n non nul : $I_n(A) = \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

Par une intégration par parties , montrer que $I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\,(I_n(A) - I_{n+1}(A))$.

4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in IN^*}$, notée ℓ , est nulle .

(a) A l'aide de la question 3. , montrer que $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n.2^n} + (J_n - J_{n+1})$.

(b) Justifier que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\frac{1}{3n.2^n}$ sont convergentes .

En déduire la nature de la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$.

(c) Soit β un réel non nul et (a_n) une suite équivalente à $(\frac{\beta}{3n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Justifier que la série de terme général a_n diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq \frac{1}{3n-1}$.

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. (a) Grâce à la question 3. , montrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $I_n = I_1 . \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.

7. On admet que $I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin qu'il demande un entier n supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n trouvée à la question 6. (b) :

```
program esc ;
var
        k , n : integer ;
        I : real ;
begin
        writeln ( ................................. ) ;
        readln  ( ................................. ) ;
        I := 2 * pi / ( 3 * sqrt(3) ) ;
        for k := 1 to n - 1 do ........................................ ;
        writeln ( ................................. ) ;
end .
```

EXERCICE 3

Les deux parties sont indépendantes. Dans tout l'énoncé p est un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [et $q = 1 - p$.

PARTIE A :

Sur une table sont placées deux boules noires (étape 0) .
Une des deux boules est choisie au hasard et éliminée de la table .
Ensuite on repose sur la table : soit une boule blanche , avec la probabilité p ,
soit une boule noire , avec la probabilité q .
On a alors atteint l'étape 1 . Cette action est répétée ainsi indéfiniment , de sorte qu'à chaque étape k ,
deux boules sont sur la table : soit deux noires (événement noté A_k)
soit une noire et une blanche (événement noté B_k)
soit deux blanches (événement noté C_k) .

A chaque étape, une des deux boules est choisie au hasard puis remplacée comme précédemment soit par une boule blanche avec la probabilité p soit par une boule noire avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note également $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$, $c_k = P(C_k)$ et on pose les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} q & \frac{q}{2} & 0 \\ p & \frac{1}{2} & q \\ 0 & \frac{p}{2} & p \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \text{ et } U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \text{avec } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le produit PD.

   (b) Calculer le produit MP et , en utilisant la relation $p + q = 1$, vérifier que $MP = PD$.

2. (a) Donner a_0 , b_0 , c_0 . Justifier que $a_1 = q$, $b_1 = p$ et $c_1 = 0$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul .

   Justifier que : $P_{A_k}(A_{k+1}) = q$, $P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{q}{2}$ et $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0$.

   Donner aussi $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $U_{k+1} = MU_k$.

   (d) En utilisant la question 1.(b) , montrer par récurrence que pour tout entier naturel k non nul :

$$U_k = P\,D^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (e) En déduire pour tout entier naturel k non nul a_k , b_k , c_k en fonction de k et montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = q^2, \qquad \lim_{k \to +\infty} b_k = 2pq, \qquad \lim_{k \to +\infty} c_k = p^2.$$

PARTIE B : *n* désigne un entier naturel non nul .

Soient $X_1 , X_2 , ..., X_n$ des variables mutuellement indépendantes et de même loi (On donne celle de X_1) :

$$P(X_1 = -1) = q^2 \qquad P(X_1 = 0) = 2pq \qquad P(X_1 = 1) = p^2$$

1. (a) Justifier que $X_1(\Omega) = \{ -1 , 0 , 1 \}$ et montrer que l'espérance de X_1 est $E(X_1) = p - q$.

   (b) Montrer que la variance de X_1 est égale à $V(X_1) = 2pq$.

2. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + X_k}{2n}$.

   (a) Déterminer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

   (b) En déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{2n\varepsilon^2}$, puis montrer que (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à p .

   (c) Justifier que (Z_n) est un estimateur de p sans biais et convergent .