# BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY

**Code sujet**
**292**
**ESC__MATS**

OPTION SCIENTIFIQUE

## MATHEMATIQUES

Mercredi 14 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

# EXERCICE 1

On considère deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ notés $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$.

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique, que l'on notera $< , >$. On note $\| \ \|$ la norme associée.

On note $H = Vect(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ et $H^\perp$ l'orthogonal de $H$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note $f$ l'application qui à tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ associe $f(\vec{u}) = <\vec{u}, \vec{w}_2> \vec{w}_1 + <\vec{u}, \vec{w}_1> \vec{w}_2$.

1. **Préliminaire** : On note $M = \begin{pmatrix} a & c^2 \\ b^2 & a \end{pmatrix}$, où $a$ est un réel et $b$ et $c$ deux réels strictement positifs.

   (a) Montrer que les valeurs propres de $M$ sont $a - bc$ et $a + bc$.

   (b) On note $E_\lambda$ le sous-espace propre de $M$ associé à la valeur propre $\lambda$.

   Montrer que $E_{a-bc} = Vect\left(\begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}\right)$ et $E_{a+bc} = Vect\left(\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}\right)$.

2. (a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que $H^\perp \subset Ker(f)$ et que $\mathrm{Im}(f) \subset H$.

3. On suppose **dans cette question uniquement** que la famille $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ est liée et on note $\vec{w}_2 = \theta \vec{w}_1$.

   Justifier que $\theta \neq 0$ puis établir que $\dfrac{1}{2\theta \| w_1 \|^2} f$ est la projection orthogonale sur $H$.

4. On suppose **dans cette question uniquement** que la famille $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ est libre.

   (a) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $Ker(f)$. Montrer que $<\vec{u}, \vec{w}_2> = <\vec{u}, \vec{w}_1> = 0$.

   En déduire $Ker(f) = H^\perp$ puis $\mathrm{Im}(f) = H$.

   (b) Calculer $f(\vec{w}_1)$, $f(\vec{w}_2)$ et justifier que la restriction de $f$ à $H$ est représentée

   dans la base $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ de $H$ par la matrice : $A = \begin{pmatrix} <\vec{w}_1, \vec{w}_2> & \|\vec{w}_2\|^2 \\ \|\vec{w}_1\|^2 & <\vec{w}_1, \vec{w}_2> \end{pmatrix}$.

   On note $B' = (\|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 - \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2, \|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 + \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2)$.

   Montrer que $B'$ est une base orthogonale de $H$ puis établir grâce à la question 1 que $B'$ est formée de vecteurs propres de $f$, dont on précisera la valeur propre associée.

   (c) Soient $\vec{w}_3$ un vecteur non nul de $H^\perp$ et $B'' = (\|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 - \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2, \|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 + \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

   Montrer que $B''$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de $f$ dans la base $B''$.
   Justifier que $f$ est un endomorphisme symétrique.

   (d) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer alors que $f$ admet :
   une valeur propre $\lambda_1 < 0$, une valeur propre $\lambda_2 > 0$ et la valeur propre $0$.

5. Réciproquement on note $r$ et $s$ deux réels strictement positifs, et $g$ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$, de valeurs propres $-2r^2$, $0$ et $2s^2$.

   (a) Que peut-on dire des sous-espaces propres associés, respectivement notés $\mathcal{E}_-$, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_+$ ?

   (b) Soient $\vec{v} \in \mathcal{E}_-$ et $\vec{w} \in \mathcal{E}_+$ deux vecteurs propres de $g$ de norme égale à 1.

   Soient $\vec{w}_1' = r\vec{v} + s\vec{w}$, $\vec{w}_2' = -r\vec{v} + s\vec{w}$.

   Montrer que pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $g(\vec{u}) = <\vec{u}, \vec{w}_2'> \vec{w}_1' + <\vec{u}, \vec{w}_1'> \vec{w}_2'$.

## EXERCICE 2

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = 0$ et si $t > 0$ , $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ .

1. Montrer que pour tout polynôme $P$ à coefficients réels , $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)e^{-x} = 0$.

2. Etude d'une suite de polynômes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

   On définit pour tout l'exercice $R_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $R_{n+1} = -X^2 R_n' + X^2 R_n$ .

   (a) Vérifier que $R_1 = X^2$ et $R_2 = -2X^3 + X^4$. Calculer $R_3$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$ , le monôme de plus bas degré de $R_n$ est $(-1)^{n+1}\, n!\, X^{n+1}$. Donner sans démonstration son monôme de plus haut degré .

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir : $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} R_n(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} R_n(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}} = 0$.

   Ces égalités sont-elles valables pour $n = 0$ ?

3. Classe $C^\infty$ de $f$ : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f^{(n)}$ la dérivée $n$ - ième de $f$ , $f^{(0)}$ désignant $f$ elle-même .

   (a) Justifier que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ .

   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $t > 0$ : $f^{(n)}(t) = R_n(\frac{1}{t})\, e^{-\frac{1}{t}}$.

   et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$ , $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f^{(n)}(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f^{(n)}(t) = 0$ .

   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(n)}(0) = 0$.

4. On note $E$ l'ensemble des polynômes $P$ à coefficients réels vérifiant $P(0) = 0$ .

   (a) Montrer que $E$ est un espace vectoriel et que pour tout entier naturel non nul $n$ , $R_n \in E$ .

   Montrer que pour tout $P \in E$ , $P(x)$ est négligeable devant $x^{\frac{3}{4}}$ au voisinage de $0$ .

   Pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $E$, on note : $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(\frac{1}{t})\, Q(\frac{1}{t})e^{-\frac{2}{t}} dt$ .

   (b) Montrer que $P(\frac{1}{t})\, Q(\frac{1}{t})e^{-\frac{2}{t}}$ est négligeable devant $(t^{-\frac{3}{2}})$ au voisinage de $+\infty$ .

   En utilisant la question 1 , montrer que $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} P(\frac{1}{t})\, Q(\frac{1}{t})e^{-\frac{2}{t}} = 0$ .

   En déduire que l'intégrale définissant $\varphi(P, Q)$ est convergente .

   (c) Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $E$ .

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir : $\varphi(R_n, R_{n+1}) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)\, f^{(n+1)}(t)\, dt$ .

   Que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{2}\left(f^{(n)}(t)\right)^2$ ? En déduire que $R_n$ et $R_{n+1}$ sont orthogonaux pour $\varphi$ .

   (e) Plus généralement , montrer que si $p$ est un entier naturel supérieur à 2 , et $s$ un entier naturel non nul , $\varphi(R_p, R_s) = -\varphi(R_{p-1}, R_{s+1})$ ( on utilisera une intégration par parties ) .

   En déduire que si $p$ et $s$ sont de parités différentes , $R_p$ et $R_s$ sont orthogonaux pour $\varphi$ .

## EXERCICE 3

Un étudiant fréquente deux cybercafés $C_A$ et $C_B$ .

Dans $C_A$ , il paye 2 euros la première demi-heure puis 1 euro pour la demi-heure suivante si elle est entamée puis 3 euros par heure supplémentaire entamée.
Dans $C_B$ , il paye $R$ euros par heure entamée ( $R$ désignant une constante strictement positive ).

Par exemple pour une session de 1h 40 , il paiera $2 + 1 + 3$ € dans $C_A$ , contre $2R$ € dans $C_B$ .
De même , pour une session de 32 minutes , il paiera $2 + 1$ € dans $C_A$ , contre $R$ € dans $C_B$ .
Enfin pour une session de 30 minutes , il paiera 2 € dans $C_A$ , contre $R$ € dans $C_B$ .

On suppose ici que la durée , exprimée en heures , passée par un étudiant sur un ordinateur au cours d'une session unique , est une variable aléatoire notée $T$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ .

1. Soit $B$ la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé $C_B$.

   (a) Justifier que $B(\Omega) = \{ kR , k \in \mathbb{N}^* \}$.

   (b) Montrer que $P(B = kR) = P(k - 1 < T \leq k)$.
   En déduire que pour tout entier naturel $k$ non nul , $P(B = kR) = e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$.

   (c) Quelle est la loi de la variable $Z = \frac{1}{R} B$ ? En déduire l'espérance de $B$ .

2. Soit $A$ la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé $C_A$ .

   (a) Justifier que $A(\Omega) = \{ 2 \} \cup \{ 3k , k \in \mathbb{N}^* \}$.

   (b) Montrer que $P(A = 2) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}$ et $P(A = 3) = e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\alpha}$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$ , $P(A = 3k) = e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$.

   (d) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} ( 3ke^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha}) )$ et en déduire $E(A) = e^{-\frac{\alpha}{2}} - 1 + \frac{3}{1 - e^{-\alpha}}$ .

   (e) Dans cette question uniquement on suppose que $\alpha = 2 \ln 2$ .

   Montrer que $E(A) - E(B) = \frac{4}{3}( 2{,}625 - R )$. Quel forfait horaire maximum doit proposer le cybercafé $C_B$ pour concurrencer $C_A$ ? ( en euros et centimes d'euros ) .

3. On examine le temps de connexion pour $n$ clients ( $n \geq 2$ ) dont on suppose les temps de connexion ( notés $T_1 , T_2 , \dots , T_n$ ) mutuellement indépendants , ces temps suivant tous une loi exponentielle de paramètre $\alpha$ . On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ .

   (a) Justifier que $S_n$ suit une loi gamma ( $\Gamma$ ) dont on précisera une densité .

   (b) Montrer que la variable $U_n = \frac{1}{S_n}$ admet une espérance et la calculer .

   (c) En déduire en fonction de $U_n$ un estimateur sans biais du paramètre $\alpha$ .