1. EXERCICE.

1. A l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

   1. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

   $$2 - e^{1/k} \in]0,1[.$$

   2. En déduire le signe de $\ln(2-e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   3. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$?
   4. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose

   $$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

   Déterminer

   $$\lim_{n\to+\infty} V_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

   1. Montrer que

   $$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\right].$$

   2. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})$.
   3. En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K>0$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

2. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$

1. Etudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
2. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.
3. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

2. EXERCICE.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de A", et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{ où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

   Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

   $$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

   1. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

      $${}^tP({}^tAA)P = D$$

      où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
      On notera par la suite λ_i le coefficient d_{ii} de la matrice $D = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.
En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

3. On pose $S = {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

4. Montrer que

$$Tr(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.$$

5. On note E_i le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2,$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.
Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de s_{ii} ?

6. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3. PROBLEME.

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X), E(Y)$ et des variances $V(X), V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de X et Y par

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ,

$$V(\lambda X+Y)=\lambda^2 V(X)+2\lambda Cov(X,Y)+V(Y).$$

   1. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

   $$(Cov(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y).$$

   2. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

   $$(Cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y)\ ?$$

3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

n désigne un entier non nul, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.
On définit sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ la fonction L_n par :

$$\begin{cases} L_n(a,b)=\dfrac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} \text{ si } 0\leqslant a\leqslant A \\ \\ L_n(a,b)=0 \qquad \text{si } a>A \end{cases}$$

1. Justifier que L_n est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$.
   Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.

2. Montrer que

   $$\forall a\in[0,A[,\ \forall b\in]0,+\infty[,\ L_n(a,b)<L_n(A,b).$$

   Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A,+\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(b)=L_n(A,b)$.
   Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0,+\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A,S,n.

4. Déduire de ce qui précède que L_n admet sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0,b_0) que l'on précisera.

3.3. Partie II : Etude d'une loi

Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b} e^{-\dfrac{(x-a)}{b}} & \text{si } x \geqslant a \\ \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a,b)$ la loi associée.

   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p, $E(X^p)$, et pour $p > 0$ déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.
5. *Simulation de la loi $\mathcal{E}(a,b)$.*
   1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.
      Montrer que la variable aléatoire $-b \ln(1-U) + a$ suit une loi $\mathcal{E}(a,b)$.
   2. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.
      Ecrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a,b)$.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n

définies par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b.

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a,b,X,S,Y` de type `real` et `i,n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule S_n et Y_n (les valeurs étant stockées respectivement dans `S` et `Y`).

```
begin
   randomize ;
   readln(a,b,n) ;
   X:=tirage(a,b) ;
   S:=... ;
   Y:=...;
   for i:= 2 to n do...
                    ......
                    ......
                    ......
   ...
end.
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \cdots + (X_n - a)$?
   En déduire une densité de S_n.

4. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
   En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n).
   Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

   1. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a.
   2. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
      A l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais, convergente.

5. On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n} - Y_n$.

    1. Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b.
    2. On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de Z_n. Montrer que

    $$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} Cov(S_n, Y_n).$$

    3. A l'aide du préliminaire montrer que

    $$\lim_{n \to +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

    et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

6. Pour un échantillon donné $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $\min \{x_1, \ldots, x_n\} \neq \max \{x_1, \ldots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$

    1. Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i.
    2. Comparer les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.