* BANQUE FILIÈRE PT *

Épreuve de Mathématiques II-A

durée 4h

Les trois exercices sont indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes regroupées dans l'une d'entre elles formant chemise.

Exercice n ° 1 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le produit scalaire, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le produit vectoriel et on rappelle la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}$.

On note $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times E$ l'ensemble des éléments $Q = (x, \overrightarrow{u})$ où $x \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} \in E$.

1 °) On définit sur $\mathbb{H}$ la loi de composition suivante :

$$(x, \overrightarrow{u}) * \left(x', \overrightarrow{u'}\right) = \left(xx' - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'}, x'\overrightarrow{u} + x\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right).$$

Montrer que $*$ est une loi de composition interne.

Préciser l'élément neutre et montrer que l'inverse de $Q = (x, \overrightarrow{u})$, quand il existe, est $\left(\dfrac{x}{x^2 + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}, \dfrac{-\overrightarrow{u}}{x^2 + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}\right)$ que l'on notera Q^{-1}.

En déduire que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \left\{(0, \overrightarrow{0})\right\}$ muni de la loi $*$ possède une structure de groupe non commutatif.

(Pour éviter un calcul fastidieux, on admettra l'associativité).

2 °) $Q \in \mathbb{H}$ étant donné, quels sont les éléments $Q' = \left(x', \overrightarrow{u'}\right) \in \mathbb{H}$ tels que :

$$Q * Q' = Q' * Q\,?$$

En déduire que les éléments $Q' \in \mathbb{H}$ tels que : $Q * Q' = Q' * Q$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$ sont de la forme $\left(x', \overrightarrow{0}\right)$.

3 °) Si $Q = (x, \overrightarrow{u})$, on note $\overline{Q}$ l'élément $(x, -\overrightarrow{u})$.

Établir que $\overline{Q * Q'} = \overline{Q'} * \overline{Q}$ et que $Q * \overline{Q}$ est de la forme $\left(q, \overrightarrow{0}\right)$ avec $q \in \mathbb{R}^+$.

Ce réel q est noté $N(Q)$. Établir l'égalité : $N(Q * Q') = N(Q)N(Q')$.

Soit S l'ensemble des des éléments de $\mathbb{H}$ qui s'écrivent sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta\,\overrightarrow{a})$ où θ appartient à $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{a}$ est un vecteur unitaire de E.

Montrer que tout élément Q de S vérifie $N(Q) = 1$. Étudier la réciproque.

S est-il un sous-groupe de $(\mathbb{H}^*, *)$?

4 °) Soit $\mathcal{R}$ la rotation vectorielle de E d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{a}$ et d'angle de mesure θ.

Montrer que l'image par $\mathcal{R}$ d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{a}$ est donnée par :

$$\mathcal{R}(\overrightarrow{v}) = \cos\theta\,\overrightarrow{v} + \sin\theta\,\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v}.$$

En déduire l'image par $\mathcal{R}$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque de E.

5 °) Si $Q \in S$, on considère l'application Φ_Q de $\mathbb{H}$ dans lui-même, définie par :

$$\Phi_Q(M) = Q * M * Q^{-1}.$$

Montrer que l'image de $M = (x, \overrightarrow{u})$ est de la forme $\Phi_Q(M) = (x, \mathcal{R}_Q(\overrightarrow{u}))$ où $\mathcal{R}_Q$ est une rotation vectorielle de E, ne dépendant que de Q.
Quel est son axe ? la mesure de son angle ?

6 °) Montrer que l'application : $Q \mapsto \mathcal{R}_Q$ de S dans le groupe des rotations de E, noté $O^+(E)$, est un morphisme surjectif de groupes.
Que peut-on dire de Q et Q' si $\mathcal{R}_Q = \mathcal{R}_{Q'}$? Conclure.

<u>Exercice n ° 2 :</u>

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\, dt$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1 °) Montrer que φ est une fonction définie et continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0.
Établir que φ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer en posant $t = 1/u$.

2 °) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \leq \sqrt{u}$ pour $u \geq 0$.
Montrer que f est une fonction définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $A > 0$. Montrer que f est continue sur $[0, A]$.
En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3 °) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$.
En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
Pour $x \neq 0$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle en t :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}.$$

En déduire l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.

4 °) Exprimer f à l'aide de φ. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

5 °) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{1+u}$ pour $u \geq 0$. Montrer : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \geq f'(x)$ pour $x > 0$.
f est-elle dérivable en 0 ?
La courbe représentative de f admet-elle une tangente en 0 ?

<u>Exercice n ° 3 :</u>

Soit θ un réel. On note sh la fonction sinus hyperbolique et ln la fonction logarithme népérien.

1 °) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sh}\theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire ses valeurs propres (On pourra les exprimer à l'aide de la fonction exponentielle).
A est-elle diagonalisable ?
Donner une base orthonormée de vecteurs propres. On distinguera deux cas selon les valeurs de θ.

2°) Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}_1$, on considère la surface (S) d'équation :

$$2\,\mathrm{sh}(\theta)x^2 + y^2 + 2xz - 2y = 0.$$

Montrer que le point Ω de coordonnées $(0,1,0)$ dans le repère $\mathcal{R}_1$ est centre de symétrie.
Quelle est la nature de (S) ?
Soit $\mathcal{R}_2$ le repère orthonormé dans lequel l'équation de (S) se ramène à :

$$X^2 + e^{\theta}Y^2 - e^{-\theta}Z^2 = 1.$$

Expliciter les formules donnant les nouvelles coordonnées (X,Y,Z) en fonction des anciennes (x,y,z).

3°) Dans le repère $\mathcal{R}_2$, étudier la nature de l'intersection de (S) avec les plans d'équations $X = h$ $(h \in \mathbb{R})$, puis $Z = k$ $(k \in \mathbb{R})$.
Dans le cas particulier $\theta = \ln 2$, tracer sur des figures planes différentes les intersections correspondant à $h = 1$ et $h = 3$ dans le plan $Y\Omega Z$ puis $k = 0$ dans le plan $X\Omega Y$.

4°) Soient a, b, c des réels tels que $a^2 + b^2 = 1 + c^2$.
Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \text{ et } b = \frac{\sin\alpha}{\cos\gamma} \text{ où } \gamma = \arctan c$$

En posant $\alpha = \beta - \gamma$, en déduire qu'il existe un réel β tel que :

$$a = \cos\beta + c\sin\beta$$
$$b = \sin\beta - c\cos\beta.$$

5°) On considère la famille de droites D_v, $v \in \mathbb{R}$ donnée dans le repère $\mathcal{R}_2$ par :

$$\begin{cases} X = \cos v + u\sin v \\ Y = e^{-\theta/2}\sin v - e^{-\theta/2}u\cos v \quad \text{pour } u \in \mathbb{R} \\ Z = e^{\theta/2}u \end{cases}$$

Montrer que les droites D_v sont contenues dans (S) et qu'elles l'engendrent.
(S) est-elle développable ? Pourquoi ?