$\ast$ BANQUE FILIERE PT $\ast$

Epreuve de Mathématiques II-A

durée 4h

Les trois exercices sont indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes regroupées dans l'une d'entre elles formant chemise.

<u>Exercice n^{0}1</u>:

Soit $E = \mathbb{R}^3$, l'espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

A tout réel t, on associe la droite Δ_t définie par les équations :

$$x \cos t + y \sin t - 1 = 0$$
$$x - z \cos t = 0$$

Soit $\mathcal{S}$ la surface engendrée par les droites Δ_t pour t réel.

1^0) Que peut-on dire des droites Δ_t et $\Delta_{t+2\pi}$, Δ_t et $\Delta_{\pi-t}$, Δ_t et Δ_{-t} ?
En déduire l'existence de symétries pour $\mathcal{S}$.

2^0) Établir que le droite Δ_t est tangente au cylindre de révolution d'axe $\left(O, \vec{k}\right)$ et de rayon 1 en un point situé dans le plan d'équation $z = 1$ et qu'elle est coplanaire avec la droite d'équations $x = 0$ et $z = 0$.
Étudier la réciproque.

3^0) Soit H_t la projection orthogonale de O sur Δ_t. Calculer les coordonnées de H_t.
Montrer que la courbe décrite par H_t, pour $t \in \mathbb{R}$, est fermée et que sa longueur l vérifie :

$$8 \leq l \leq 4\sqrt{5}$$

4^0) Déterminer et représenter sur 3 figures différentes les intersections de $\mathcal{S}$ avec les 3 plans de coordonnées.

5^0) Déterminer des équations paramétriques de $\mathcal{S}$.
$\mathcal{S}$ est-elle une surface développable ?

6^0) Montrer que $\mathcal{S}$ est incluse dans la surface Σ d'équation :

$$y^2(z^2 - x^2) - (z - x^2)^2 = 0$$

Existe-t-il des points de Σ n'appartenant pas à $\mathcal{S}$?

<u>Exercice n^{0}2:</u>

Soit $E = \mathbb{R}^2$, l'espace affine euclidien orienté de dimension 2 rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On définit les deux courbes suivantes :
$\mathcal{C}_1$ par la représentation paramétrique : $t \mapsto \vec{OM}(t) = (t - \operatorname{th} t)\,\vec{i} + \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\,\vec{j}$

et $\mathcal{C}_2$ par l'équation cartésienne : $\qquad y - \operatorname{ch} x = 0$

où ch et th désignent respectivement les fonctions cosinus et tangente hyperboliques.

1^0) Faire l'étude de la courbe $\mathcal{C}_1$ (domaine de définition, symétries, sens de variations, branches infinies).
La construire dans E. (On pourra prendre 3 cm comme unité.)

2^0) Donner une équation de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}_1$ au point M de coordonnées $(x(t), y(t))$.
Soit T l'intersection de Δ et de la droite d'équation $y = 0$.
Montrer que la longueur du segment $[MT]$ est constante.

3^0) On définit la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = t - 2\operatorname{th} t \quad \text{pour tout } t.$$

En faire l'étude (domaine de définition, symétries, sens de variations, branches infinies).
On montrera que la dérivée φ' s'annule sur $[0, +\infty[$ en un point t_0 tel que $\operatorname{ch} t_0 = \sqrt{2}$.
Donner une valeur approchée de t_0 à 10^{-2} près et en déduire les valeurs approchées à 10^{-2} près des extremums relatifs de φ.
Tracer le graphe de φ.

4^0) On considère la famille $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ de courbes d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x = 1 - \alpha^2$$

Préciser la nature de ces courbes.
Déduire de la question précécente qu'il existe un réel α_0 tel que, si $|\alpha| > \alpha_0$, l'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec Γ_α se réduit à deux points.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α_0.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et à Γ_α en l'un des points d'intersection sont orthogonales.

5^0) Tracer la courbe $\mathcal{C}_2$.
Calculer le rayon de courbure en un point A d'abscisse α appartenant à la courbe $\mathcal{C}_2$.
Déterminer une équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_2$ en A.

6^0) Soient A_1 et A_2 deux points de la courbe $\mathcal{C}_2$ d'abscisses α_1 et α_2 tels que les tangentes à $\mathcal{C}_2$ aux points A_1 et A_2 soient orthogonales.
Si on note ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure aux points A_1 et A_2, calculer l'expression
$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

7^0) Déterminer les développantes de $\mathcal{C}_2$.
On appelle $\mathcal{D}$ la développante qui admet l'axe $(O, \vec{i})$ comme asymptote.
En donner une équation paramétrique. Comparer avec $\mathcal{C}_1$.

<u>Exercice n^{0}3</u>:

Dans $\mathbb{R}^n$, on note $\boldsymbol{.}$ le produit scalaire usuel et $\| \ \|$ la norme associée.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique, notée $A = (a_{ij})$, vérifie :
$$a_{ij} > 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } j \text{ variant de 1 à } n.$$
Soit f appartenant à $\mathcal{E}$.
f étant symétrique, on rappelle que ses valeurs propres sont réelles.
Soit α la plus grande d'entre elles.

1^0) En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres, établir l'inégalité :
$$f(x)\boldsymbol{.}x \leq \alpha \|x\|^2 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^n$$
Montrer que l'égalité n'est atteinte que si x est un vecteur propre associé à α.
En utilisant $\hat{x} = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, montrer de plus l'inégalité :
$$|f(x)\boldsymbol{.}x| \leq \alpha \|x\|^2 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^n$$

2^0) Établir que $\alpha > 0$.
Montrer que si λ est une valeur propre de f alors on a $|\lambda| \leq \alpha$.

3^0) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à α, montrer que $\hat{x} = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ est aussi un vecteur propre associé à α.
En déduire que, pour tout i variant de 1 à n, on a $x_i \neq 0$.
Démontrer que le sous-espace propre associé à α est de dimension 1 et que l'on peut choisir comme base un vecteur $\widetilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ vérifiant :
$$\tilde{x}_i > 0 \quad \text{pour tout } i \text{ variant de 1 à } n,$$
$$\text{et } \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = 1$$
On gardera cette notation $\widetilde{x}$ dans la suite de l'exercice.

4^0) En calculant la somme des composantes de $f(\widetilde{x})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, établir l'égalité :

$$(*) \qquad \alpha = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j C_j$$

où $C_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$ est la somme des éléments de la j-ième colonne.

En déduire $\quad \min\limits_{j=1\ldots n} C_j \leq \alpha \leq \max\limits_{j=1\ldots n} C_j$

5^0) Démontrer, pour tout m entier, l'encadrement :

$$\min_{j=1\ldots m} \frac{p_j}{q_j} \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} p_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} q_j} \leq \max_{j=1\ldots m} \frac{p_j}{q_j}$$

où p_j et q_j sont des réels strictement positifs pour tout j variant de 1 à m.

6^0) Si f appartient à $\mathcal{E}$, montrer que la composée $f^2 = f \circ f$ appartient aussi à $\mathcal{E}$ et que α^2 est la valeur propre maximale de f^2 associée au vecteur propre $\widetilde{x}$.
En appliquant $(*)$ à f et à f^2, établir l'égalité :

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\tilde{x}_j \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} C_k \right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{x}_j C_j}$$

En déduire $\quad \min\limits_{j=1\ldots n} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} C_k}{C_j} \leq \alpha \leq \max\limits_{j=1\ldots n} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} C_k}{C_j}$

7^0) Soit f déterminée par sa matrice A dans la base canonique avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la plus grande valeur propre α.
Donner les encadrements issus des questions 4^0) et 6^0).