L'objet de ce problème est d'obtenir diverses approximations de la constante d'Euler définie par

$$S = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Il est composé de quatre parties qui sont très largement indépendantes. Il sera tenu compte dans la notation du soin apporté à la rédaction.

Partie I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$(1) \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{t+n}\,\mathrm{d}t$$

et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Expliciter u_n.

   Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. Expliciter S_n.

   En déduire la relation $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$
   (On pourra dans (1) *majorer et minorer le dénominateur).*

   En déduire un encadrement de $S - S_n$.

4. On veut déterminer une valeur approchée de S en calculant une somme partielle S_n. Déterminer une valeur de n permettant d'obtenir une valeur approchée de S à 10^{-2} près; à 10^{-6} près.

   Que pensez-vous de cette méthode d'évaluation ?

Partie II

Dans toute cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.
On définit les fonctions A et B d'une variable réelle par les relations :

$$A(x) = \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Préciser les domaines de définition de A et B.

   Ces fonctions sont-elles continues ? dérivables ? de classe $\mathcal{C}^\infty$?

2. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
   En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $u \in [0,1]$,
$$(1-u^2)\mathrm{e}^{-u} \leqslant 1-u \leqslant \mathrm{e}^{-u}.$$
   (b) Montrer que, pour $\alpha \in [0,1]$,
$$(1-\alpha)^n \geqslant 1-n\alpha.$$

(c) En déduire que pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}.$$

(d) Déduire de ce qui précède que

$$S = A(1) - B(1).$$

Partie III

1. Soit $x > 0$. Calculer $A(x) - B(x) - A(1) - B(1)$.

   En déduire que pour tout $x > 0$,

   (2) $$S = A(x) - B(x) - \ln x$$

2. (a) Montrer que pour $x > 0$, $0 \leqslant B(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

   (b) Déterminer $x_0 > 0$ tel que pour $x \geqslant x_0$ on ait $B(x) \leqslant \dfrac{1}{3}10^{-2}$.

3. (a) Montrer que A est développable en série entière :

   $$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

   en précisant la valeur de a_n.

   (b) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que la suite $(|a_n x^n|)_{n \geqslant 0}$ est décroissante pour $n \geqslant x$.

   En déduire, pour $n \geqslant x$, un majorant du reste d'ordre n de la série $\sum a_n x^n$.

4. Indiquer comment utiliser les résultats précédents pour calculer une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Partie IV

On considère les fonctions f et F définies par

$$f : (x, t) \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^x \qquad \text{et} \qquad F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie pour $x > -1$.

2. Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$. On définit la fonction φ par :

   $$\forall t > 0, \qquad \varphi(t) = \begin{cases} t^a \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \in]0, 1[\\ t^b \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

   Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$ et que, pour $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $|f(x, t)| \leqslant \varphi(t)|$.

   En déduire que F est continue sur $]-1, +\infty[$.

3. Montrer de façon analogue que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

4. Montrer que $F'(0) = -S$.

   (On pourra montrer, par des intégrations par parties bien choisies, que $F'(0) = B(1) - A(1)$.)

5. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \ln t\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que cette intégrale existe pour $x > 0$.

   Exprimer sa valeur à l'aide de x et de la constante S.