# ❋ Banque filière PT ❋

# Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

---

Le problème porte sur l'étude des équations qui régissent le mouvement d'une particule d'une fibre dans un fluide lui-même en mouvement.

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, sa base canonique $B_0$ est notée $\{\vec{e_i}\}_{1 \leq i \leq 3}$ et le repère associé est $(O, B_0)$.
Le produit scalaire de deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et la norme d'un élément $\vec{u}$ est notée $\| \vec{u} \|$.

## Première partie

Soit $\vec{F} : t \to \vec{F}(t)$ une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $a$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère le système différentiel suivant:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = a(\vec{F}) \qquad (E)$$

   (a) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de $(E)$ vérifiant une condition du type $\vec{F}(t_0) = \vec{F_0}$ où $t_0$ et $\vec{F_0}$ sont fixés?

   (b) Soit $\vec{F}$ une solution de $(E)$. Montrer alors que si il existe un réel $t_0$ tel que $\vec{F}(t_0) = \vec{0}$ , $\vec{F}$ est la fonction nulle.

**Dans la suite, on supposera toujours que $\vec{F}$ ne s'annule pas.**

Tournez la page S.V.P.

2. On définit alors les fonctions $\nu : t \to \| \vec{F}(t) \|$ et $\vec{f} : t \to \frac{1}{\nu(t)}\vec{F}(t)$

   (a) Montrer que $\nu$ et $\vec{f}$ sont des fonctions dérivables .

   (b) Vérifier alors que $\vec{f(t)}$ et $\vec{f'(t)}$ sont deux vecteurs orthogonaux pour tout réel $t$.

   (c) Calculer la dérivée de $\nu$.

3. Montrer que si $\vec{F}$ vérifie le système $(E)$, la fonction vectorielle $\vec{f}$ vérifie le système différentiel:
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = a(\vec{f}) - (a(\vec{f}) \cdot \vec{f})\,\vec{f} \tag{e}$$

# Deuxième partie

Soient deux réels $\lambda \in ]-1,1[$ et $G > 0$. On pose $r = \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$.
Dans la suite du problème, $a$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $B_0$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & G(\lambda-1) & 0 \\ G(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche $\vec{F}$ la solution de $(E)$ vérifiant la condition initiale $\vec{F}(0) = x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} + z_0\vec{e_3}$.
On pose $\vec{F}(t) = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2} + z(t)\vec{e_3}$.

1. (a) Donner l'expression de $z(t)$.

   (b) Intégrer $(E)$ lorsque $x_0 = y_0 = 0$.

2. Montrer que $r^2x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$ pour tout réel $t$. Que peut-on en déduire pour les courbes intégrales de $(E)$?

3. On pose $\omega = G\sqrt{1-\lambda^2}$.

   (a) Vérifier que $x$ et $y$ sont solutions de l'équation différentielle
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0.$$

   (b) Intégrer alors $(E)$ lorsque $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.

   (c) On suppose dans cette question que $x_0 \neq 0$. Vérifier qu'il existe une constante $t_0$ (à définir en fonction de $x_0, y_0, r$ et $\omega$) telle que:
$$\frac{y(t)}{x(t)} = r\tan\omega(t - t_0)$$
   lorsque $t$ est au voisinage de 0.

# Troisième partie

Soit $\vec{F}$ une solution de $(E)$ ne s'annulant pas et $\vec{f}$ la fonction vectorielle unitaire associée, c'est à dire $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$.
On pose $\vec{f(t)} = \sin\theta(t)\cos\phi(t)\vec{e_1} + \sin\theta(t)\sin\phi(t)\vec{e_2} + \cos\theta(t)\vec{e_3}$ où $\theta$ et $\phi$ sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
Les valeurs de $\vec{f}, \theta$ et $\phi$ en 0 seront notées $\vec{f_0}, \theta_0$ et $\phi_0$.

1. (a) Illustrer par une figure la définition de $\theta(t)$ et $\phi(t)$.
   (b) Prouver que si il existe $t_0$ tel que $\sin\theta(t_0) = 0$, alors $\sin\theta$ est la fonction identiquement nulle.
   (c) Prouver que si il existe $t_0$ tel que $\cos\theta(t_0) = 0$, alors $\cos\theta$ est la fonction identiquement nulle.
   (d) Démontrer que si il existe $t_0$ tel que $\sin 2\theta(t_0) = 0$, $\theta$ est une fonction constante.

2. Soient $\vec{u}(t) = \cos\phi(t)\vec{e_1} + \sin\phi(t)\vec{e_2}$ et $\vec{v(t)}$ le vecteur tel que $B_\phi(t) = (\vec{u(t)}, \vec{v(t)}, \vec{e_3})$ soit une base orthonormale directe.

   (a) Ecrire $\vec{f'(t)}$ dans la base $B_\phi(t)$ en fonction de $\theta(t)$,$\phi(t)$,$\theta'(t)$ et $\phi'(t)$.
   (b) Donner la matrice $A_\phi(t)$ de $a$ dans la base $B_\phi(t)$.
   (c) Calculer $a(\vec{f(t)}) \cdot \vec{f(t)}$

3. (a) Ecrire le système différentiel (S) vérifié par $\theta$ et $\phi$ équivalent à $(e)$.
   (b) Prouver que si $\vec{f_0}$ et $\vec{e_3}$ ne sont pas colinéaires, le système (S) équivaut à :

$$\frac{d\phi}{dt} = 2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) \qquad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2G\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta \qquad (2)$$

4. Intégrer (S) lorsque $\lambda = 0$ et donner la trajectoire du point $m$ défini par $\overrightarrow{Om(t)} = \vec{f(t)}$.

5. On suppose maintenant que $\lambda$ est non nul.

   (a) Prouver que toute solution $\phi$ de (1) est strictement monotone et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\theta$ reste constant le long d'une courbe intégrale si et seulement si $\sin 2\theta_0 = 0$.
   (c) Lorsque $\sin 2\theta_0 \neq 0$, montrer que (2) s'intègre à l'aide de (1) en :

$$\tan\theta = \frac{C}{\sqrt{\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi}}$$

   où $C$ est une constante.

**Tournez la page S.V.P.**

6. On désigne par $\mathcal{C}_\lambda$ l'ensemble des courbes intégrales de (1) et par $\phi_1$ une solution de (1).

   (a) Soit un réel $t_1$. Montrer que $\phi_2 : t \to \phi_1(t - t_1)$ est aussi solution de (1). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.

   (b) Montrer que $\phi_3 : t \to -\phi_1(-t)$ est aussi solution de (1). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.

   (c) Montrer que $\phi_4 : t \to \frac{\pi}{2} - \phi_1(-t)$ est solution de l'équation (1) associée au paramètre $-\lambda$. Comment déduit-on $\mathcal{C}_{-\lambda}$ de $\mathcal{C}_\lambda$?

7. On définit, pour tout entier relatif $k$, le réel $t_k$ par $\phi(t_k) = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

   (a) Pour intégrer (1) sur $]t_k, t_{k+1}[$, effectuer le changement de variables $u = \tan\phi$ et $t = \tau(u)$.

   (b) Montrer que la nouvelle équation obtenue s'intègre en:

$$\tau(u) = \frac{1}{Gr(1-\lambda)}\mathrm{Arctan}\frac{u}{r} + \tau_k$$

   où $\tau_k$ est une constante que l'on déterminera.

   (c) Retrouver alors sans utiliser la deuxième partie que $\vec{f}$ est une fonction périodique de période $T = \frac{\pi}{G}(r + \frac{1}{r}) = \frac{2\pi}{\omega}$.