BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur Epreuves ESC : ESC SAINT ETIENNE

CODE EPREUVE :

292

ESC_MATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

mardi 16 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Les questions 2 , 3 et 4 sont indépendantes de la question 1.

On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice H relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note également $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$$ et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n , puis en déduire b_n en fonction de n , λ_1 et λ_2 .

(c) Pour tout entier naturel non nul n, exprimer a_n en fonction de n , λ_1 et λ_2 .

2. (a) Montrer que H est diagonalisable.

(b) Montrer par la méthode du pivot que les valeurs propres de H sont -2 , λ_1 et λ_2 .

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de h.
Justifier que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère ici l'application $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto {}^tX\, H\, X \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Justifier que q est une forme quadratique et exprimer $q((x, y, z))$ en fonction de x , y , z .

(b) Que peut-on dire du signe de q ? Justifier sa réponse.

4. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^3$ défini par $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1 ; +\infty[$, ainsi que la fonction f définie sur D par : $f((x, y, z)) = x \ln(1 + z) + (y - 1)^2(z - 1) + 2z$.

(a) Montrer que f est de classe C^2 sur D .

(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
Montrer que f ne présente qu'un point critique M_0 .

(c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
En déduire la Hessienne de f au point M_0 .

(d) Le point M_0 est-il un maximum , un minimum , ou un point col pour f ?

EXERCICE 2

On considère un réel $\alpha > 0$ et la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n \ln^{\alpha+1}(n)}$.

On note , pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k$.

1. Soit la fonction f définie sur $I =]\,1\,; +\infty\,[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(x)}$.

(a) Montrer que f est de classe C^2 sur I et calculer sa dérivée f'.
Montrer que f est concave sur I .

(b) Etudier la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^{\alpha+1}(t)}\, dt$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n .

(c) Soit un entier $k \geq 2$. Montrer que pour tout réel $t \in [k\,; k+1]$, $u_{k+1} \leq f'(t)$.

(d) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , $u_{k+1} \leq \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(k)} - \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(k+1)}$.

Dans toute la suite , on note $L = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} u_k$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2. (a) Justifier l'existence de R_n . Exprimer R_n à l'aide de L et S_n .

(b) Soit p et n deux entiers tels que $2 \leq n < p$:

Montrer grâce au 1.d. que : $\sum\limits_{k=n+1}^{p} u_k \leq \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(n)} - \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(p)}$.

(c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $0 \leq L - S_n \leq \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(n)}$.

3. (a) Montrer que $\dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(n)} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)$.

(b) Compléter les parties pointillées du programme Turbo-Pascal suivant afin qu'il demande deux réels strictement positifs α et ε et affiche un entier naturel n et une somme partielle S_n tels que l'écart entre S_n et L soit inférieur à ε : (on rappelle que **trunc** est la fonction partie entière).

```
program esc2006;
var
        S , epsilon , alpha : real ;
        k , n : integer ;
begin
        writeln ( ............................................................................ ) ;
        readln ( ........... ) ;
        readln ( ........... ) ;
        n := trunc ( exp ( exp ( ................................................) ) ) + 1 ;
        S := 0 ;
        for k := 2 to n do ................................................................. ;
        writeln ( ............................................................................ ) ;
end .
```

(c) On suppose que les valeurs $\alpha = 10$ et $\varepsilon = 10^{-6}$ ont été entrées.
Y aura-t-il une erreur dûe à un débordement à l'exécution de ce programme ?
(on prendra 2^{15} comme plus grand entier possible pour le type **integer** et on donne $\ln(2) \approx 0{,}69$)

EXERCICE 3

Le préliminaire n'est utilisé qu'en 2(e) et 2(f). Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

1. **Préliminaire :**

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance $E(Y_n)$ et une variance $V(Y_n)$.

On suppose en outre que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = m$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0$. (m étant une constante réelle).

(a) Montrer que $E((Y_n - m)^2) = V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2$.

(b) En déduire par inégalité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2}{\varepsilon^2}$.

(c) Montrer alors que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

Dans la suite de cet exercice on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes et de même loi.

Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i(\omega)$.

(M_n prend donc pour valeur la plus grande des valeurs prises par $X_1, X_2, \cdots, X_n$ et on remarque que $M_1 = X_1$).

2. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.

On note $q = 1 - p$.

(a) Montrer que $(M_2 = 0) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ et en déduire la loi de M_2.

(b) Montrer plus généralement que M_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.

(c) Soient r et s deux entiers tels que $1 \leq r < s$. Montrer que si $(M_r = 1)$ alors $(M_s = 1)$.

En déduire $E(M_r M_s) = 1 - q^r$, puis calculer la covariance $\mathrm{cov}(M_r, M_s)$.

(d) Donner la matrice de variance-covariance des variables $(M_1, M_2, \cdots, M_n)$.

(e) Déduire du préliminaire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

(f) Montrer que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables à densité indépendantes, de loi uniforme sur $[0;1]$.

(a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0;1]$.

(b) En déduire que pour tout réel x de $[0;1]$, $P(M_n \leq x) = x^n$.

Montrer que M_n est une variable à densité.

(c) Soit ε un réel de $]0;1]$. Calculer $P(|M_n - 1| \leq \varepsilon)$.

(d) En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

(e) Soit α un réel positif.

e1. Soit n un entier strictement supérieur à α.

Montrer que $P(n(1 - M_n) \leq \alpha) = 1 - (1 - \frac{\alpha}{n})^n$.

e2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{\alpha}{n})^n = e^{-\alpha}$.

e3. En déduire que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.